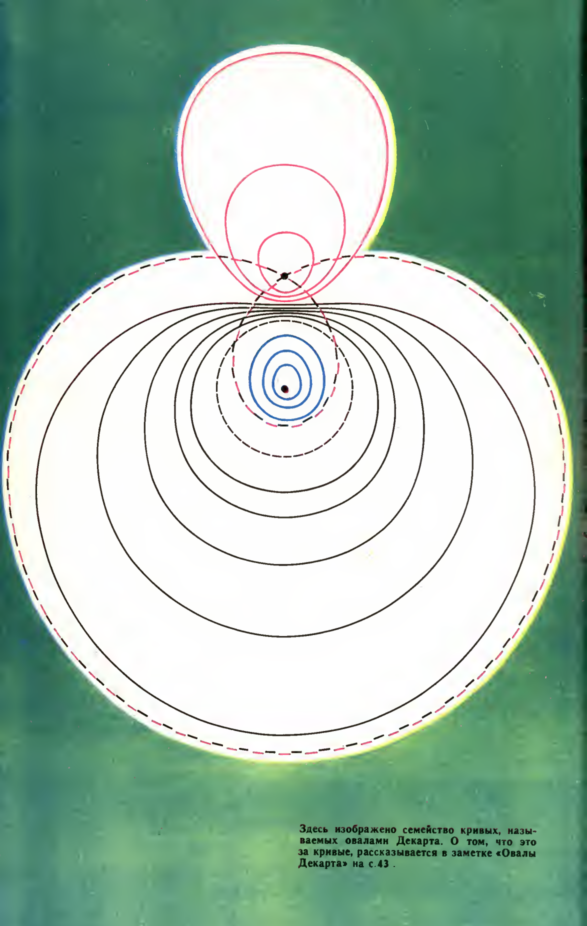
КВАНТ

6
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Здесь изображено семейство кривых, называемых овалами Декарта. О том, что это за кривые, рассказывается в заметке «Овалы Декарта» на с.43 .

Основан в 1970 году

Квант

6
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Издательство „Наука“
Главная редакция физико-математической литературы

На рисунке на первой странице обложки вы видите результат многократных инверсий трех попарно касающихся окружностей: сначала — их инверсии относительно друг друга, затем — инверсии окружностей, получающихся после этих инверсий, относительно друг друга и т. д. Как выполнено это построение? Какой геометрический смысл стоит за подобными преобразованиями? Об этом вы узнаете, прочитав статью В. Вавилова (см. с. 38).

В НОМЕРЕ:



Исаак Ньютон (1642—1727)

До восемнадцатого века никакой науки не было; познание природы получило свою научную форму лишь в восемнадцатом веке или, в нескольких отраслях, несколькими годами раньше. Ньютон своим законом тяготения создал научную астрономию, разложением света — научную оптику, теоремой о биноме и теорией бесконечных — научную математику и познанием природы сил — научную механику.

Ф. Энгельс.

Математические начала натуральной философии

Предисловие *)

« ...Механика есть учение о движениях, производимых какими бы то ни было силами, и о силах, требуемых для производства каких бы то ни было движений, точно изложенное и доказанное.

Древними эта часть механики была разработана лишь в виде учения о пяти машинах **), применяемых в ремеслах; при этом даже тяжесть (так как это не есть усилие, производимое руками) рассматривалась ими не как сила, а лишь как грузы, движимые сказанными машинами. Мы же, рассуждая не о ремеслах, а об учении о природе и, следовательно, не об усилиях, производимых руками, а о силах природы, будем заниматься, главным образом, тем, что относится к тяжести, легкости, силе упругости, сопротивлению жидкостей и к тому подобным притягательным или напирающим силам. Поэтому и сочинение это нами предлагается как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений, при помощи предположений, доказанных в предыдущих книгах, математически выводятся силы тяготения тел к Солнцу и отдельным планетам. Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря. Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы остались бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому, более правильному, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение.

При издании этого сочинения оказал содействие остроумнейший и во всех областях науки ученейший муж Эдмунд Галлей, который не только правил типографские корректуры и озаботился изготовлением рисунков, но даже по его лишь настояниям я приступил и к самому изданию. Получив от меня доказательства вида орбит небесных тел, он непрестанно настаивал, чтобы я сообщил их Королевскому обществу, которое затем своим благосклонным вниманием и заботливостью заставило меня подумать о выпуске их в свет...»

*) Мы приводим небольшой отрывок из «Предисловия» Исаака Ньютона к первому изданию «Математических начал натуральной философии», вышедшему в 1686 году. Перевод на русский язык был сделан впервые в 1915 году замечательным русским механиком академиком А. Н. Крыловым.

**) Основные машины, рассматривавшиеся древними авторами, суть: vectis — рычаг, axis in peritrochio — ворот, trochlea seu polispastus — блок, cochlea — винт, cuneus — клин. Эти-то пять машин и подразумевал Ньютон. (*Прим. А. Н. Крылова.*)





Исаак Ньютон

И. Башмакова

Был этот мир глубокой тьмой окутан.
Да будет свет! И вот явился Ньютон.
А. Поп *)

Ньютон был величайший гений из всех, когда-либо существовавших, и самый счастливый, ибо только однажды дано человеку открыть систему мира.
Ж. Л. Лагранж

Каждый из вас, несомненно, слышал о Ньютоне. Трудно найти ученого, оказавшего столь же сильное влияние на развитие мировой науки и культуры. Механика Ньютона — краеугольный камень в фундаменте современного естествознания. Опираясь на открытый им закон всемирного тяготения, Ньютон создал логичную и стройную систему мироздания. Большая часть математического аппарата современного естествознания основана на разработанном Ньютоном исчислении бесконечно малых.

Несмотря на все значение творчества Ньютона, серьезное изучение его наследия началось совсем недавно. Дело в том, что после смерти Ньютона все его бумаги попали к мужу его племянницы — Джону Кондуиту, а затем к дочери последнего, вышедшей замуж за одного из лордов Портсмутских. В этой семье бумаги Ньютона хранились до 1936 года, когда все Портсмутские коллекции были распроданы на публичном аукционе в Лондоне. Три миллиона оригинальных слов Ньютона были оценены в 9.030 фунтов стерлингов 10 шиллингов. Только благодаря героическим усилиям некоторых ученых и общественных деятелей значительная часть бумаг попала в библиотеки Кембриджа и Лондона. Однако много бумаг уплыло за океан. Некоторые пропали бесследно. Хронология рукописей, которую перед смертью установил сам Ньютон, была безнадежно нарушена.

Систематическое исследование наследия Ньютона началось лишь после Второй мировой войны. С 1959 года в Англии стала издаваться переписка Ньютона (к настоящему времени издано 7 томов), были изданы его работы по динамике, и, наконец, с 1967 года начали выходить его математические рукописи (вышло уже 7 томов). Все это позволяет нам теперь более полно судить о силе и глубине гения Ньютона. Великий ученый предстает теперь перед нами не только как создатель дифференциального и интегрального исчислений, но и как крупнейший алгебраист, исследователь в области алгебраической геометрии и теории чисел.

Исаак Ньютон родился 4 января 1643 года в семье небогатого фермера-арендатора в деревне Вулсторп близ

---

*) В XX веке эта эпиграмма XVIII века была продолжена:

Но сатана недолго ждал реванша —
Пришел Эйнштейн и стало все, как раньше.

(Перевод обеих эпиграмм С. Я. Маршака.)

города Грантэма. Отец Исаака умер еще до рождения сына. Мальчик посещал сначала сельскую школу, а затем школу в Грантэме. Директор школы обратил внимание на способности юноши и уговорил его мать отправить сына учиться в университет. Летом 1661 года Исаак Ньютон поступил в колледж св. Троицы (Тринити колледж) Кембриджского университета в качестве бедного студента, обязанного прислуживать бакалаврам, магистрам и студентам старших курсов. В 1665 году он окончил колледж со степенью бакалавра, через три года стал магистром, а еще через год по предложению своего учителя Исаака Барроу занял его кафедру. В университете Ньютон читал лекции по физике и математике. Ньютон не был женат — такова была традиция Тринити колледжа, восходящая еще к средневековью.

Жизнь Ньютона протекала спокойно и размеренно и не была богата событиями. Однако трудно найти жизнь, более насыщенную напряженной, полной поисков и вдохновения созидательной работой.

В этой статье мы подробно расскажем о математических достижениях Ньютона.

Как показывают черновые записи Ньютона, в области математики он был самоучкой — в колледже читался только курс элементарной математики. Интерес молодого человека к математике был возбужден случайным обстоятельством: летом 1663 года он купил на ярмарке книгу по астрологии. Чтобы в ней разобраться, ему понадобилось знакомство с тригонометрией, которое, в свою очередь, потребовало знания геометрии Евклида. Так Ньютон приступил к изучению «Начал» Евклида, от которых перешел к сочинениям Виета и Декарта по алгебре и аналитической геометрии, затем познакомился с работами Валлиса по исчислению бесконечно малых. Записные книжки показывают, что Ньютону понадобилось около года, чтобы овладеть современной ему математикой и начать самостоятельные исследования. Именно в это время он записал знаменитую формулу разложения $(1+x)^r$ в ряд, где r — любое рациональное число (о ней мы будем говорить ниже). Уже к 1664—1667 годам относятся первые исследования Ньютона по аналитической геометрии и исчислению бесконечно малых.

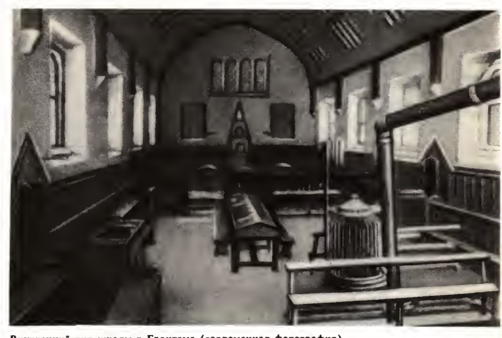
Аналитическая геометрия
и изучение кривых третьего порядка

Кривые второго порядка (эллипс, гипербола и парабола) были всесторонне изучены еще Аполлонием (III в. до н. э.). Во времена Аполлония не было еще буквенной алгебры, поэтому Аполлоний записывал уравнения кривых геометрически, с помощью равенства некоторых площадей.

Аналитическая геометрия, основанная на буквенной алгебре, была создана только в новое время Пьером Ферма (1636) и Рене Декартом (1637), причем последний придал буквенному исчислению современный вид. Вводя систему координат, оба математика рисовали одну координатную ось (горизонтальную) с помеченным началом отсчета, для второй оси задавалось только направление. Гораздо важнее то обстоятельство, что ни Декарт, ни Ферма не выводили свойств кривых из определяющих их уравнений. Они довольствовались тем, что приводили уравнение к одному из канонических видов, встречающихся у Аполлония, а затем просто пользовались его результатами. Таким образом, специфический метод аналитической геометрии остался нераскрытым.

Молодой Ньютон сразу же начал рисовать на чертеже обе оси координат (под произвольным углом друг к другу). Все четыре квадранта были для него равноправны, тогда как предыдущие исследователи старались сдвинуть кривую так, чтобы рассмотрение велось, в основном, в первом и четвертом квадрантах. Ньютон отвел центральное место преобразованиям координат и выписал формулы параллельного переноса и поворота.

Наконец, Ньютон начал исследование кривых третьего порядка, лишь отдельные примеры которых были известны ранее. Это исследование он провел с той же исчерпываю-



Внутренний вид школы в Грантэме (современная фотография)

щей полнотой, с которой были изучены кривые второго порядка. Ньютон обобщил на кривые третьего порядка понятия диаметра, оси, вершины, центра, касательной. Он разбил эти кривые на виды, которых оказалось 72. Эти результаты вскоре стали известны английским математикам, но опубликованы они были только в 1704 году в приложении к книге «Оптика». Это приложение — «Перечисление кривых третьего порядка» — написано весьма сжато, без всяких доказательств. Теперь, благодаря черновикам, мы можем узнать, как Ньютон пришел к своим результатам, а это для математиков часто бывает важнее самих результатов.

«Перечисление кривых» положило начало новой области математики — алгебраической геометрии. Это сочинение было вполне понято и оценено только в конце XIX — начале XX века.

Метод флюксий

В это же время Ньютон приступает к созданию нового исчисления.

В XVII веке в связи с успехами механики земных и небесных тел (напомним, что в это время Галилеем были открыты законы падения тел и Кеплером — законы движения планет) ученые обратились к изучению трудов Архимеда, стараясь извлечь из них общие методы определения касательных, экстремумов, скоростей, центров тяжести, площадей и объемов.

Ньютон первый понял, что все это множество задач распадается на два класса взаимно обратных задач, которые могут быть сформулированы в общем виде, причем для их решения можно дать единый алгоритм. Для этого Ньютон вводит прежде всего понятие *флюенты* (от латинского слова fluere — течь) — величины, меняющейся при изменении времени или другой величины (которую он называл *обобщенным временем*). Таким образом, флюента — это первое название для функции. Ньютон обозначал флюенты последними буквами латинского алфавита: x, y, z. Скорость изменения флюенты, т. е. производную, он называл *флюксией* и обозначал, соответственно, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. (В физике эти обозначения сохранились до сих пор.) После этого Ньютон сформулировал две основные задачи:

I. Дано соотношение между флюентами: $f(x, y, z)=0$. Найти соотношение между их флюксиями: $\Phi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)=0$.

II. Дано соотношение между флюксиями: $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)=0$. Найти соотношение между флюентами: $\Psi(x, y, z)=0$.

Частными случаями первой задачи являются нахождение скорости движения по пути, заданному как функция времени, нахождение экстремумов и касательных. Ньютон дает алгоритм решения этой задачи для случая, когда соотношение между флюентами задается с помощью многочлена $F(x, y)$ или $F(x, y, z)$.

Правило Ньютона таково: расположи многочлен по степеням какой-нибудь из флюент, например x; умножь каждый член на $\dot{x}/x$ и на соответствующую степень x; сделай то же самое по отношению к другой флюенте; возьми сумму полученных членов и приравняй ее к нулю.

Применим, для примера, это правило к многочлену $y - x^n$. Получаем

$$y\cdot\frac{\dot{y}}{y} - x^n\cdot n\cdot\frac{\dot{x}}{x}=0 \quad \text{или} \quad \dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

Свое правило Ньютон обосновывал следующим образом: увеличиваем время на «неопределенно малую часть» — момент o, тогда флюенты возрастут на $o\dot{x}$ и $o\dot{y}$; подставим новые значения флюент в первоначальное выражение и сократим все члены на o. Центральное место своего обоснования он излагает так: «Но так как мы предположили o бесконечно малой величиной..., то те члены, которые на нее умножены, можно считать за ничто по сравнению с другими. Поэтому я ими пренебрегаю».

Для рассмотренного примера имеем

$$y+o\dot{y}=(x+o\dot{x})^n,$$

$$y+o\dot{y}=x^n+nx^{n-1}o\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o^2\dot{x}^2+\ldots,$$

$$o\dot{y}=nx^{n-1}o\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o^2\dot{x}^2+\ldots,$$

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o\dot{x}^2+\ldots,$$

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

Ответ правильный! Однако обоснование его весьма неубедительно.

Ньютон и сам был не удовлетворен изложенным обоснованием и неоднократно пытался подвести под свое исчисление более прочный базис. Во введении к «Математическим началам натуральной философии» (1687) Ньютон изложил теорию пределов (она называлась у него «теория первых и последних отношений»), однако для обоснования и систематического построения дифференциального исчисления он ее не применил. Это было сделано примерно 150 лет спустя в работах О. Коши (1789—1857) и некоторых других математиков прошлого века.

Вторая задача в общем виде является задачей интегрирования дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, связывающих некоторые функции и их производные. В частном случае — для уравнения $\dot{y}=f(x)$ — эта задача сводится к отысканию первообразных.

Ньютон показывает, что проблема «Определить площадь, ограниченную какой-либо заданной кривой» сводится к определению флюенты по заданной флюксии, так как флюксия (производная) площади $z=ADB$ равна ординате $y=BD$ (см. рис. 1; см. также равенство (2) в п. 100 учебника «Алгебра и начала анализа 10»).

В общем же случае для решения второй задачи Ньютон применил новый аналитический аппарат, который позволил ему распространить свой алгоритм на очень широкий класс функций. Это был принципиальный шаг. Остановимся на нем подробнее.

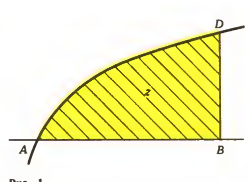
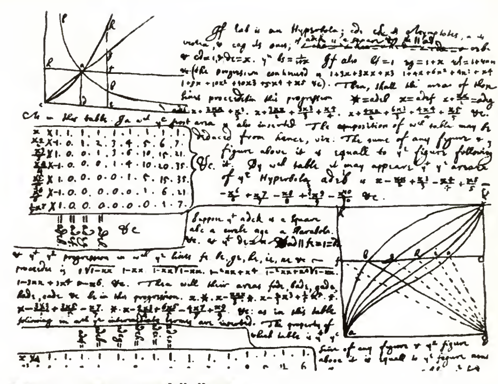


Рис. 1



Фрагмент из черновых записей И. Ньютона

Степенные ряды

Первоначально метод флюксий применялся к многочленам. А как быть с другими функциями? Как, например, находить флюксии от функций $\frac{x}{a^2+x^2}$, $\sqrt{ax+b}$, $\sin x$? Как решать уравнения $\dot{y}=\sin x$, $\dot{y}=\sqrt{ax+b}$?

И вот Ньютон пришел к мысли, что все известные ему функции можно записать вполне единообразно с помощью степенных рядов

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$,

которые представляют собой как бы бесконечные многочлены. Примером такой записи может служить (при $|x|<1$) равенство

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Ньютон пишет, что пришел к своей идее, руководствуясь аналогией с представлением чисел десятичными дробями: «... учение о буквенных выражениях находится в таком же отношении к алгебре, как учение о десятичных дробях к обыкновенной арифметике... И так же, как десятичные дроби обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и корни приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений и т. д.) можно с их помощью привести к ряду простых количеств...»

Ньютон получил разложение в степенные ряды для функций a^x, $\log_a(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а также для дробных и иррациональных функций. Именно для разложения последних Ньютон обобщил известную для целого положительного n формулу бинома

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \\ + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n$$

на случай, когда показатель есть любое рациональное число r:

$$(a+x)^r = a^r + ra^{r-1}x + \\ + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}a^{r-2}x^2 + \ldots$$

При нецелом r число членов суммы

уже не будет конечным. Например,

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\ .\ .\ .$$

Ньютон придумал также способ, как разложить в ряд функцию y, заданную неявно с помощью уравнения $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — многочлен. Этот способ получил название *параллелограмма Ньютона* *). Он был положен в основу работ Пюизе и других математиков прошлого века, изучавших алгебраические функции.

Ньютон прекрасно понимал роль рядов в созданном им исчислении. Он подчеркнул это и в самом заглавии своих сочинений: «Метод флюксий и бесконечных рядов» и «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов». Оба эти сочинения были широко известны английским и континентальным математикам уже с самого начала 70-х годов XVII века, однако публикация их по различным причинам все время откладывалась. Второе из них было опубликовано только в 1711 году, а первое — в 1736 году, через 9 лет после смерти автора и через 60 лет после того, как оно было написано.

Алгебра

Интерес Ньютона к алгебре пробудился очень рано. Первый его самостоятельный результат был записан им еще в 1664—1666 годах. Он относился к выражению сумм степеней корней алгебраического уравнения через его коэффициенты. Еще Франсуа Виет (1540—1603) установил связь между коэффициентами и корнями алгебраического уравнения: если x_1, x_2, ..., x_n — корни уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ .\ .\ .+x_n=-a_1, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ .\ .\ .+x_{n-1}x_n=a_2, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ x_1x_2\cdot\ .\ .\ .\ .\cdot x_n=(-1)^n a_n. \end{cases} \qquad (*)$$

*) Подробнее о параллелограмме Ньютона см. с. 19.

Функции, задаваемые левыми частями равенств (*), не меняются, если переставлять между собой аргументы. Они получили название *элементарных симметрических функций*.

Альбер Жирар (1595—1632) сумел выразить суммы степеней корней

$$S_m=x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m$$

при $m=2$, 3, 4 (по теореме Виета $S_1=-a_1$) через коэффициенты уравнения. Например, $S_2=a_1^2-2a_2$.

Ньютон нашел общую рекуррентную формулу, которая в современных обозначениях (по определению $a_i=0$ при $i>n$) имеет вид

$$S_m+a_1S_{m-1}+a_2S_{m-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_{m-1}S_1+a_m\cdot m=0.$$

Она позволяет найти S_m для любого m.

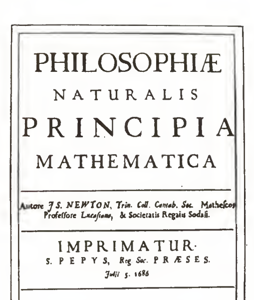
С 1673 по 1683 год Ньютон читал в Кембридже лекции по алгебре, которые легли в основу его книги «Всеобщая арифметика», опубликованной в 1707 году. Основное внимание в ней Ньютон уделяет вопросу о нахождении корней уравнения, а также тому, как, не решая уравнения, узнать, в каких пределах лежат все его корни, сколько из них положительных, отрицательных или мнимых.

* *
*

Мы не упоминаем здесь о многих других математических результатах Ньютона, понимание которых потребовало бы от читателя специальных знаний.

Надо, однако, помнить, что Ньютон был физиком не меньше, чем математиком. Уже в 1665—1667 годах он открыл закон всемирного тяготения и приступил к выводу с его помощью законов движения планет. Одновременно он исследовал проблемы оптики. Ньютон открыл дисперсию света и сконструировал зеркальный телескоп-рефлектор. Этот телескоп он представил Королевскому обществу (так называют в Англии Академию наук), которое настолько высоко оценило изобретение Ньютона, что избрало его в 1672 г. своим членом. С 1703 г. Ньютон становится президентом Королевского общества и сохраняет этот пост до конца жизни.

С 1680 г. Ньютон, уступая настоя-


PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR·

S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.

Julii 5. 1686

LONDINI,

Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII

Soc. Reg. Lond.

Титульный лист первого издания «Математических начал натуральной философии»

тельным требованиям друзей-ученых, приступил к работе над книгой «Математические начала натуральной философии», в которой должна была быть изложена система мира. Об этом периоде жизни великого ученого, который продолжался около пяти лет, сохранились записи его секретаря. По его словам Ньютон был все это время спокойным, приветливым, никогда не впадал в раздражение, почти никуда не выходил, спал не более 4—5 часов в сутки, никогда не садился обедать без многократных напоминаний и каждый час, не посвященный занятиям, считал потерянным.

Часть своего времени он посвящал химическим опытам; видимо, эта смена занятий давала некоторый отдых его уму. Ньютон был великолепным экспериментатором.

Наконец, в 1687 году книга была опубликована. По единодушному мнению физиков, в истории естествознания не было более крупного события, чем появление ньютоновых «Начал». В нескольких словах трудно передать все величие этой книги. Прежде всего поражает принцип ее построения: Ньютон кладет в основу физические аксиомы — три аксиомы движения, известные теперь под именем *законов Ньютона*, и закон всемирного тяготения, все же остальные известные в то время факты механики земных и небесных тел он выводит из них чисто математически. Так он получает законы движения точки и твердого тела, кеплеровы законы движения планет, форму орбит комет, строит начала гидродинамики, объясняет явления приливов и отливов. Таким образом, было показано, что «возможно с единой точки зрения охватить весь механизм мировых явлений» (Д. И. Менделеев).

«Математические начала» выдержали при жизни Ньютона еще два издания, причем второе издание было существенно переработано и дополнено.

Хотя в 90-х годах Ньютон отошел от занятий математикой, однако именно к концу века относится решение им одной знаменитой задачи.

Задача о брахистохроне

Теория флюксий Ньютона и дифференциальное исчисление Лейбница, работы которого начали публиковаться с 1684 года, позволяли решать задачи на нахождение экстремумов функций, т. е. находить те точки, в которых значение функции будет больше (или, соответственно, меньше), чем ее значения в некоторой окрестности этих точек.

В 1696 году Иоганн Бернулли поставил перед математиками мира задачу: «*Определить кривую линию, соединяющую две данные точки, расположенные на различных расстояниях от горизонта и не лежащие на одной и той же вертикальной линии, обладающую тем свойством, что тело, движущееся по ней под влиянием собственной тяжести и начинающее свое движение из верхней точки, достигает нижней точки в кратчайшее время*».

На представление решения давался годичный срок.

Таким образом, в этой задаче надо было найти не точку, в которой некоторая величина (в данном случае — время) будет минимальной, а кривую

линию, которой будет отвечать минимальное значение этой величины. Отображения, ставящие в соответствие каждой кривой некоторого класса определенное число, называются теперь *функционалами*.

Лейбниц назвал эту задачу прекраснейшей и выразил мнение, что ее смогут решить только три математика. И действительно, помимо самого И. Бернулли и Лейбница, которые решили эту задачу еще до ее опубликования, решения представили Якоб Бернулли и Лопиталь. Третье решение было опубликовано в Лондонском журнале «Philosophical Transactions» без подписи автора. Однако И. Бернулли сразу же узнал в неизвестном авторе И. Ньютона; как он писал: «ex ungue leonis» (льва узнают по его когтям). Только после этого ученые обратили внимание на то, что в «Математических началах» уже была решена задача того же рода, а именно: *найти тело вращения, которое при движении в жидкости по направлению своей оси испытывает наименьшее сопротивление* (*предполагается, что сопротивление жидкости пропорционально квадрату скорости*).

Этот тип задач был впоследствии рассмотрен Эйлером и Лагранжем, которые создали для их решения исчисление, получившее название *вариационного*.

* * *

О Ньютоне распространено много легенд и анекдотов. Его охотно представляют замкнутым, рассеянным, не замечающим ничего вокруг. Конечно, Ньютон был действительно, большей частью, погружен в свои мысли. На вопрос о том, как он сделал свои великие открытия, он ответил «постоянным размышлением о них». И все же он находил время, чтобы заботиться о нуждах университета и Королевского общества. Любят рассказывать, что, будучи выбранным в Парламент, Ньютон не произнес там ни слова, если не считать одного случая, когда он попросил закрыть форточку. Гораздо менее известно, что в качестве депутата Парламента он много помогал Кембриджскому университету, играя роль посредника между ним и правительством.

Принципиальность Ньютона и твердость его характера проявились, когда в 1687 году король Яков II предложил Кембриджскому университету дать степень магистра одному бенедиктинскому монаху (Альбану Френсису). Университет отказался выполнить эту просьбу и послал в Лондон делегацию, в которую входил Ньютон. Был момент, когда под нажимом короля все члены делегации хотели дать согласие при условии, что подобные случаи больше не повторятся. Только решительная позиция Ньютона привела к победе: король вынужден был отказаться от своего предложения.

Последние тридцать лет жизни Ньютон провел в Лондоне. Это было связано с тем, что в 1696 году он был назначен хранителем, а затем и директором Монетного двора. Должность эта не была просто почетным званием. Ньютону пришлось провести перечеканку всей монеты Англии. Он активно занимался также делами Королевского общества. Научные интересы его переместились в область истории: он составлял хронологию событий египетской, древнегреческой и библейской истории. Занимался он и вопросами богословия.

Умер Ньютон в возрасте 84 лет, в ночь с 20 на 21 марта 1727 года.

Вот, что говорил сам Ньютон о своем творчестве: «Не знаю, как на меня посмотрит мир, но самому себе я представляюсь мальчиком, играющим на морском берегу и приходящим в восхищение, когда ему удается порой найти более гладкий, нежели обыкновенно, камешек или красивую раковину; между тем, громадный океан сокровенной истины простирается передо мною».

Я. Смородинский

Закон всемирного тяготения



В современной физике есть постоянные, которые называют фундаментальными. Среди них скорость света c, заряд электрона e, масса электрона m, гравитационная постоянная γ, постоянная Планка h. Эти постоянные входят в формулы, описывающие физические процессы в микромире и в космическом пространстве. Фундаментальность этих постоянных в том, что их значения не изменяются ни со временем, ни с местом в пространстве. Где бы мы ни измеряли эти постоянные, мы всегда получим одни и те же значения. Физики знают, что эти постоянные не изменились сколь-нибудь заметно за миллиарды лет эволюции Вселенной.

Первую фундаментальную постоянную — гравитационную постоянную γ — ввел в физику Исаак Ньютон. Появилась она с открытием закона всемирного тяготения.

В истории этого открытия много удивительного и интересного. Забавна легенда о том, как Ньютон открыл этот закон, сидя под яблоней, когда ему на голову упало яблоко. Интересно, как Ньютон смог доказать справедливость этого закона, изучая движение Луны. Удивительно, сколь точным оказался этот закон.

Но самым удивительным было, с какой смелостью Ньютон объявил, что закон тяготения есть всеобщий закон, который определяет взаимодействие любых тел во Вселенной.

Из равенства ускорений всех падающих тел он заключил, что сила, действующая на падающее тело, пропорциональна массе этого тела; сила, с которой Луна притягивается Землей, должна быть пропорциональна как массе Луны, так и массе Земли, поскольку можно с таким же успехом считать, что Земля притягивается Луной.

Это было главное в открытии Ньютона. Но Ньютон понял и то, что, хотя для разных тел ускорение должно быть одним и тем же, оно должно уменьшаться с возрастанием расстояния между притягивающимися телами.

В своем сочинении «Математические начала натуральной философии», вышедшем в Англии в 1686 году,

Ньютон подвел итог своим многолетним исследованиям в механике *); он излагает, как он нашел зависимость сил притяжения между телами от расстояния между ними.

Проще всего было бы вывести этот закон для движения по окружности (мы это и сделаем ниже); но планеты движутся по эллипсам, и надо было доказать, что из того же закона можно получить и эллиптическую траекторию.

В своей книге Ньютон формулирует четыре правила, которыми должен руководствоваться естествоиспытатель. Он называет эти правила «правилами философствования». Мы приведем их полностью:

«Правило I. Не дóлжно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

Правило II. Поэтому, поскольку возможно, дóлжно приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.

Правило III. Такие свойства тел, которые не могут быть ни усиляемы, ни ослабляемы и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Правило IV. В опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям.»

Правило III позволяет Ньютону сделать следующий вывод: «...Опытами и астрономическими наблюдениями устанавливается, что все тела по соседству с Землей тяготеют к Земле, и притом пропорционально количеству материи каждого из них; так, Луна тяготеет к Земле пропорционально своей массе, и взаимно наши моря тяготеют к Луне, все планеты тяготеют друг к другу, подобно этому и тяготение комет к Солнцу. На основании этого правила надо утверждать, что все тела тяготеют друг к другу». Зависимость сил тяготения от расстояния Ньютон сформулировал так: «Если времена находятся в полукубическом отношении радиусов, то центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов...». Первая половина этой теоремы есть просто третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$$

—периоды обращения планет относятся как полукубические степени (степени 3/2) радиусов их орбит. Центростремительная же сила есть та сила, которая заставляет планеты падать на Солнце, то есть сила притяжения планет Солнцем.

Книга Ньютона была первой книгой, где механика излагалась как точная наука; эту книгу нужно считать первой книгой по теоретической физике и считать год выхода книги — 1686 год — годом рождения теоретической физики. Влияние этой книги на науку было огромным. После нее уже нельзя было ограничиться только рассуждениями, словесными описаниями явлений природы — надо было создавать их теорию. А правильность теории может быть установлена только опытной проверкой: если предсказания теории совпадают с данными опытов, наблюдений, — теория верна. Создание Ньютоном и Лейбницем математического анализа дало средства для выполнения этой программы.

* *
*

Еще древние греки создали первую теорию движения планет. Эта теория была изложена Птолемеем в трактате «Алмагест». Но она совсем не касалась вопроса о том, почему движутся планеты. Такой вопрос и не возникал. Следуя учению Аристотеля, греки

*) Натуральной философией в Англии называли в XVII веке физику. Книга Ньютона была переведена на русский язык только в 1915 году замечательным русским ученым А. Н. Крыловым. Этот перевод помещен в V томе Собрания сочинений Крылова. Ниже в тексте статьи все цитаты приводятся из этого перевода.



Клавдий Птолемей (II век н. э.)

считали, что планетам свойствеиио двнжеине по окружиостям, подобио тому как тяжелым телам свойственно падать, а легкнм, как дым, подыматься вверх. Даже в средние века рассуждать о причииах двнжения плаиет значнло смешивать астрономю с физнкой, что было по представлеииям того времеии ие позволнтельио; законы иебесиые н земиые прннадлежалн разиым областям н в иих ие следовало нскать чего-лнбо общего.

Все же Коперник в 1543 году говорил о том, что тяжесть — это общее свойство тел, «...стремлеиие, благодаря которому онн, смыкаясь в форме шара, образуют едниое целое. И следует допустить, что это стремлеине присуще также Солнцу, Луне и остальиым планетам...».

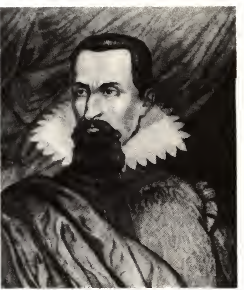
Кеплер (а до Кеплера еще и Гнльберт) сравннвал тяжесть с магнитиым действием. При этом Кеплер был первым, кто объявил задачу о двнжеиии плаиет фнзической задачей, и первым, кто ясно поставил вопрос, *почему* двнжутся планеты, в то время как все остальиые астроиомы лншь придумывали геометрнческие модели, которые опнсывалн, *как* движутся планеты. Фнзнки времеи Галнлея и Кеплера решали физнческие задачн, составляя пропорцнн. Так, о паденин тел иа Земле говорилось, что если промежуткн времеии расположнть в форме арнфметической прогресснн, то отрезкн путей, проходнмых телом за последовательные промежуткн временн, будут относиться как квадраты последовательных чисел. Галилей знал, что все тела на Земле падают с одннаковым ускореннем; он вполне мог объяснить, почему брошеиное на Земле тело летнт по параболе. Опнсывая полет снаряда, он говорил, что это двнженне складывается нз равноускоренного паденния и равномериого прямолннейного двнжения по ннерцнн, н не задавался вопросом о том, почему снаряд падает равноускоренно. Очень трудно было прийтн к мысли, что ускоренне завнснт от высоты. Галилей счнтал, что даже Луна (еслн остановнть ее поступательиое двнженне) будет падать на Землю с тем же ускореннем, с каким камеиь падает иа Земле.

Правда, Галнлей считал, что и для Луиы должен выполияться «земной» закои иезавнснмостн ускорення свободного падення от массы. Так что «половнну» задачн он поннмал правнльно! Но Галнлей ннкак не мог воспрннять ндею, что Земля прнтягнвает камень. Паденне камня (Луны) на Землю есть просто проявленне стремлення всех тел собраться поближе к одному центру, собраться в некую шарообразную «кучу». В то время считалось очевндным, что одно тело может действовать на другое, только сопрнкасаясь с инм. Действне на расстояннн казалось просто немыслимым. Поэтому Галилей отверг ндею Кеплера о том, что прнливы н отливы иа Земле связаны с прнтяжением Луной вод океанов. Ко времеин Ньютона положенне начало измеияться.

Не все слепо следовалн за Галнлеем. Так, Роберт Гук, основываясь иа аиалогии тяжестн с притяжением магннта, пытался в 1666 году опытиым путем определнть, как изменяется вес тела с высотой. Он проводнл опыты с маятннками разной длины в Вестмнистерском аббатстве в Лоидоие. Ясно, что обнаружнть чтолибо существенное он так н не смог. Даже высказывая предположеиие о том, что снла прнтяжения нзмеияется обратио пропорцнонально квадрату расстояиня, он ие смог облечь свон мыслн в строгую форму уравнений.



Николай Коперник (1473—1543)



Иоганн Кеплер (1571—1630)

Гук не умел еще ни писать уравнений, ни решать их и потому не смог проверить справедливость этого предположения. Также ничего не смог сделать и другой знаменитый в то время механик англичанин Рен. Рен также говорил о законе обратных квадратов, но и у него все ограничивалось словами.

Только в руках Ньютона все стало на свои места. Первая, и главная, идея пришла ему в голову в 1665 году, когда он спасался от чумы в своем родовом поместье. Как рассказывают, все дело началось с яблока, упавшего с дерева. 23-летнего ученого поразила мысль, что причина, заставляющая яблоко падать на Землю, должна быть родственна причине, заставляющей Луну отклоняться от своего прямолинейного пути. Сейчас это кажется очевидным, но во времена Ньютона сама мысль о подчинении космических тел простым земным законам была необычайно смелой. Но одно дело поверить самому в смелую гипотезу, а другое — убедить в ее справедливости других. Для этого надо, по крайней мере, найти способ ее проверки, найти способ, как мы говорим сейчас, сравнить теорию с опытом.

Лучше всего было начать с исследования движения Луны, используя имеющиеся результаты наблюдений. Это требовало сил и времени. Ньютон, кроме того, был еще занят оптическими исследованиями; и вообще ученые того времени обычно не торопились с публикациями. Вероятно, поэтому лишь через 20 лет — в апреле 1686 года Ньютон представил Королевскому обществу (Английской академии наук) первый том «Начал», а весь труд был опубликован к середине 1687 года. Только тогда теория была выдана на суд других физиков.

* *
*

Напишем закон всемирного тяготения для Солнца и планеты (обозначая их массы M и m). Сила притяжения

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}.$$

Ускорение, сообщаемое этой силой планете,

$$a = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Как же Ньютон получил эти формулы?

В своих поисках закона тяготения Ньютон исходил из третьего закона



Галилео Галилей (1564—1642)



Христиан Гюйгенс (1629—1695)

Кеплера: квадраты средних времен обращення планет относятся как кубы нх средних расстояннй от Солнца. (Этот закон Ньютон называет полукубнческим отношеннем.) Еще тогда, когда Ньютон сравнивал паденне яблока н Луны, он знал, что если тело двнжется по окружности, иа это тело действует сила, прнтягнвающая его к цеитру окружности; он знал также, что центростремительное ускоренне пропорционально квадрату скоростн и обратно пропорционально расстоянню.

Правда, честь открытия закоиов кругового движення приписывается Гюйгенсу, но Гюйгенс опублнковал свое открытие лишь в 1673 году (хотя знал о нем еще в 1659 году). Ньютону прншлось поэтому разбнраться во всем самому.

Ньютон рассуждал прнмерно так. Третий закон Кеплера гласнт, что для планет одной снстемы

$$\frac{R_1^3}{T_1^2}=\frac{R_2^3}{T_2^2}= \ . \ . \ . =\text{const}.$$

Пусть планеты двнжутся по окружиостям. Введем угловую скорость вращення планеты по орбнте $\omega=2\pi/T$. Тогда третий закон Кеплера прнмет вид:

$$\omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3 = \ . \ . \ . = \text{const}.$$

Предположнм теперь, что сила взанмодействня планеты с Солнцем пропорцноиальна некоторой степенн расстояния:

$$F \sim R^n.$$

Этой же степенн R пропорцноиальио и ускоренне планеты:

$$a = CR^n,$$

где C — некоторая константа. Так как $a=\omega^2 R$,

$$\omega^2 = CR^{n-1}.$$

Какова должна быть степень n, чтобы пронзведение $\omega^2 R^3$ было постоянным? Так как

$$\omega^2 R^3 = CR^{n-1}R^3 = CR^{n+2},$$

то ясио, что произведение $\omega^2 R^3$ ие завнснт от R, если $n=-2$. Тогда

$$\omega^2 R^3 = C.$$

Ньютон также предположил, что постояниая C пропорциональна массе прнтягнвающего тела, т. е. Солнца:

$$C = \gamma M_\odot.$$

Постоянная γ и есть гравитациоииая постоянная, которая, по предположению Ньютона, уже ие завнсит нн от каких другнх величин. Итак,

$$a=\gamma \frac{M_\odot}{R^2}.$$

Следовательно, сила, сообщающая планете массы m это ускорение, т. е. снла взанмодействня планеты с Солнцем, равна

$$F=\gamma \frac{M_\odot m}{R^2}.$$

В этом выводе, однако, задача слишком упрощена. На самом деле она значительно сложнее.

Вводя в формулу одно-единственное расстояние R, мы рассуждали так, как будто бы Солнце — материальная точка, не имеющая размеров. Но Ньютон понимал, что для того чтобы проверить закон тяготения, например, по движению Луны, надо уметь решать задачу для тела конечного размера, просуммировав как-то вклады от разных частей Земли и Луны. Задача была сложной, и ее решение было получено не скоро. Вероятно, это было главной причиной, почему Ньютон так долго не публиковал свое открытие.

Результаты решения этой сложной задачи Ньютон представил в виде теорем. Для однородных по плотности тел формула для закона притяжения выглядит так, как будто бы вся масса тела сосредоточена в его центре. Ньютон доказал, что сферический слой однородной плотности притягивается другими телами и, по закону равенства действия и противодействия, притягивает сам другие тела так, как будто вся его масса сосредоточена в центре *). Если представить себе шар сложенным из сферических слоев, то можно видеть, как вычислять поле тяготения тела со сферически симметричным распределением массы. Эти теоремы Ньютона решили дело. Теперь в выражении для силы, действующей между Луной и Землей, под R следовало понимать расстояние между центрами этих тел. Замена реальных Земли и Луны телами со сферически симметричным распределением масс оказалась настолько хорошим приближением, что только в последние годы, при расчетах траекторий спутников, пришлось уточнять формулы.

Была и еще одна причина, которая, по-видимому, мешала Ньютону опубликовать его исследования закона тяготения. Ньютон не имел точного значения радиуса Земли, и сравнение расчетов с результатами наблюдений не давало хорошего согласия. Только после того как Пикар измерил радиус Земли с большой точностью (ошибка не превышала 0,03 %), исчезли расхождения.

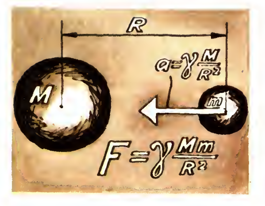
Теперь можно было доказать самое главное. Доказать, что из закона всемирного тяготения следует, что траекториями планет будут эллипсы, а траекториями комет — гиперболы.

Необходимость такого доказательства была четко сформулирована в январе 1684 года во время беседы трех английских физиков Галлея, Рена и Гука. Рен даже объявил приз — книгу, которую он отдаст тому, кто в течение 2 месяцев решит задачу. Приз так и не был вручен. В мае Галлей предлагает эту задачу Ньютону, который и прислал ему через полгода нужное доказательство.

В «Началах» Ньютон излагает решение обратной задачи: он находит, каков должен быть закон взаимодействия, чтобы траекторией был эллипс, и показывает, что это должен быть закон «обратных квадратов». Более того, Ньютон доказывает, что если бы закон сил, действующих между планетой и Солнцем, хотя бы немного отклонился от закона обратных квадратов, то точки наибольшего и наименьшего удаления планеты от Солнца не были бы неподвижны в пространстве. А из наблюдений было известно, что эти точки (их называют апсидами) почти неподвижны. Это доказательство Ньютона — одно из самых блестящих в астрономии.

Обратим еще раз внимание на сказанное: можно утверждать, что закон обратных квадратов для сил

*) Речь идет о телах, находящихся вне слоя. Ньютон доказал, что внутри полости гравитационные силы равны нулю.



притяжения следует из одного только факта неподвижности апсид; так что расчеты силы притяжения с помощью третьего закона Кеплера излишни; на самом деле третий закон является следствием первого. Этого, конечно, Кеплер знать не мог *).

* * *

Много лет теория Ньютона была основой небесной механики, и хотя многие пытались обнаружить какие-либо поправки к закону всемирного тяготения, найти их удалось только Эйнштейну. Сейчас мы знаем, когда закон всемирного тяготения становится неточным, и умеем вычислять к нему поправки. Закон тяготения верен до тех пор, пока расстояние между телами много больше так называемого гравитационного радиуса притягивающего тела. Гравитационным радиусом тела массы M называют величину

$$R_{\text{гр}} = \frac{2\gamma M}{c^2},$$

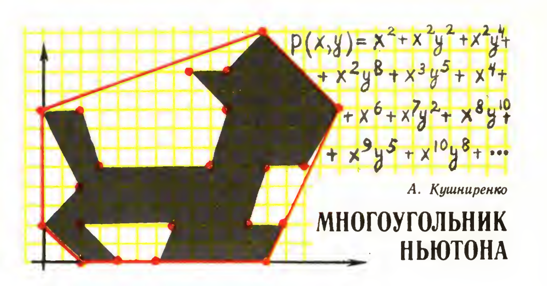
где $\gamma M = C$ это известная уже нам «постоянная Кеплера», а c — скорость света. Для Солнца гравитационный радиус равен 3 *км*, а для Земли — 7 *мм*. Отсюда мы можем заключить, что закон всемирного тяготения на поверхности Земли может иметь относительную ошибку, равную примерно $\frac{7 \cdot 10^{-3}\ м}{6{,}4 \cdot 10^{6}\ м} \approx 10^{-9}$ (радиус Земли ≈ 6400 *км*), а на поверхности Солнца — $\frac{3 \cdot 10^{3}\ м}{7 \cdot 10^{8}\ м} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ (радиус Солнца $\approx 700\ 000$ *км*).

На расстоянии, равном расстоянию от Солнца до Меркурия (около 50 *млн. км*), мы можем ожидать ошибку в законе всемирного тяготения порядка $\frac{3 \cdot 10^{3}\ м}{5 \cdot 10^{10}\ м} = 0{,}6 \cdot 10^{-7}$. Хотя ошибка и очень мала, но она приводит к наблюдаемому эффекту.

Это связано с указанным Ньютоном свойством апсид «отзываться» своим движением на нарушение закона обратных квадратов. Из-за малой поправки эллиптическая орбита Меркурия медленно поворачивается в пространстве. Это движение (в сторону обращения Меркурия на орбите) накладывается на движение, связанное с возмущающим действием Юпитера, которое объясняется ньютоновской теорией. За 100 лет накапливается дополнительное смещение 43″, объяснение которого было дано лишь общей теорией относительности.

Не всегда поправки общей теории относительности столь малы. В глубинах космоса есть области, в которых эффекты общей теории относительности оказываются основными. Это — недра тяжелых звезд, ядра галактик. При описании Вселенной как физической системы основным «инструментом» является общая теория относительности. Но дорогу к таким исследованиям открыл Ньютон. Он был первым, кто создал методы теоретической физики, и первым применил эти методы к изучению Вселенной.

*) Если бы сила притяжения была пропорциональна расстоянию, планета имела бы замкнутую эллиптическую орбиту только в том случае, если бы Солнце располагалось не в фокусе эллипса, а в его центре.



А. Кушниренко

МНОГОУГОЛЬНИК НЬЮТОНА

«Известна фундаментальная роль, которую сыграли исследования Ньютона в развитии анализа бесконечно малых. Большинство его идей растворилось в работах позднейших авторов, часто не сохранив ни имени Ньютона, ни его способа обозначений. Но в современной математике немало методов и результатов более частного характера, носящих имя Ньютона. Их значение было вскрыто лишь в гораздо более позднюю эпоху, когда общий прогресс математики дал возможность оценить важность того или иного результата Ньютона, записанного часто в виде небольшого замечания. К числу такого рода результатов относится «многоугольник», или, как его часто называют, «параллелограмм» Ньютона...»

Н. Г. Чеботарев

Важная характеристика многочлена от одной переменной — это его степень. Зная степень, можно многое сказать о многочлене, даже не зная его коэффициентов. Например, многочлен нечетной степени всегда имеет действительный корень, число действительных корней многочлена не превосходит его степени и т. п.

Самым прсстым и важным обобщением понятия степени для многочлена $P(x, y)$ от двух переменных x, y будет так называемая *полная степень* многочлена по переменным x, y. Однако более тонкнм обобщеннем понятия степени для многочлена от двух переменных является не число, а более сложная вещь — именно, *многоугольник на плоскости*.

В этой статье мы каждому многочлену от двух переменных будем сопоставлять многоугольник на плоскостн. В основном эта конструкция принадлежит велнкому английскому математику и физику Исааку Ньютону; начиная с XVIII века этот многоугольник называют *«многоугольником Ньютона»*. Многоугольник Ньютона многочлена от двух переменных «наводит мост» между алгеброй и геометрией. Движение по этому мосту не затухает вот уже 300 лет, а в последние годы оно стало особенно интенсивным. Обычно по мосту можно двигаться в двух разных направлениях — и многоугольник Ньютона полезен в двух отношениях. Рассматривая многоугольник на плоскости как многоугольник Ньютона некоторого многочлена, мы можем использовать алгебраические свойства многочленов для решения геометрических задач про многоугольники. Наоборот, геометрические свойства многоугольника Ньютона помогают решать задачи про многочлены. Два примера использования многоугольника Ньютона при изучении многочленов подробно разобраны в § 2 и § 3. Примеры использовання многочленов при изучении многоугольников гораздо сложнее, н мы не будем ими заниматься.

§ 1. Что такое многоугольник Ньютона

Диаграмма Ньютона многочлена от двух переменных

Напомним, что *одночленом* от независимых переменных x и y называется функция вида $x^m y^n$, где m и n — неотрицательные целые числа, а *многочленом* от x и y с действительными коэффициентами называется функция $P(x, y)$, заданная формулой

$$P(x, y) = a_1 O_1 + a_2 O_2 + \dots + a_k O_k, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — действительные числа, а $O_1, O_2, \dots, O_k$ — попарно различные одночлены *). Если в формуле (1) коэффициент a_i отличен от нуля, то говорят, что одночлен O_i *входит* в многочлен $P(x, y)$. Например в многочлен $2 + 3y - \sqrt{2}x^3y^2$ входят одночлены 1, y и x^3y^2, а в многочлен $P(x, y) \equiv 0$ не входит ни один одночлен. Удобно изображать одночлены, входящие в многочлен $P(x, y)$, точками на координатной плоскости: мы отмечаем на этой плоскости точку $M(m_0; n_0)$, если одночлен $x^{m_0}y^{n_0}$ входит в многочлен $P(x, y)$. Тогда каждому ненулевому многочлену $P(x, y)$ мы сопоставляем конечное множество на плоскости Omn — будем обозначать его $Д(P)$, — изображающее наглядно одночлены, входящие в $P(x, y)$. Точку плоскости, у которой обе координаты — целые числа, мы будем называть *целой* точкой. Для любого многочлена P множество $Д(P)$ состоит только из целых точек, поэтому его удобно рисовать на клетчатой бумаге. Например, множество $Д(P)$ для многочлена

$$P(x, y) = xy - y^3 + 3x^2y^2 + 0{,}5x^4 - 2x^3y^4 \qquad (2)$$

изображено на рисунке 1. Подчеркнем, что значения ненулевых коэффициентов многочлена P никак не учитываются при построении множества $Д(P)$. Это множество обычно называют *диаграммой Ньютона* многочлена P.

Предостережение. Не следует смешивать числовую плоскость $\mathbf{R}^2$ — область определения многочлена P, с координатной плоскостью Omn, на которой мы рисуем диаграмму Ньютона многочлена P. Точки этих плоскостей имеют разную природу.

Как Ньютон определял «диаграмму Ньютона»

Ньютон тоже отмечал одночлены, входящие в многочлен от переменных x, y, на клетчатой бумаге. Ньютон расчерчивал такую бумагу сам и отмечал не углы клеток, а целые клетки. Вот как он описывает эти построения в письме одному из своих коллег.

«...Для лучшего уразумения этого правила поясню его на следующей диаграмме. Построй прямой угол BAC; стороны его BA и AC раздели на равные части и, восставив перпендикуляры, раздели угловую площадь на равные квадраты или параллелограммы, которые отметь вписанными в них измерениями букв x и y (см. рисунок 2). Затем, когда дано уравнение, отметь каким-нибудь знаком параллелограммы, соответствующие всем его членам...»

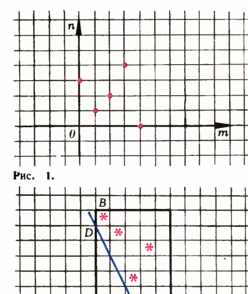


Рис. 1.

Рис. 2.

*) Независимые переменные x и y принимают значения в множестве действительных чисел; таким образом, функция $P(x, y)$ имеет в качестве области определения числовую плоскость, а в качестве множества значений — числовую прямую.

Здесь речь идет о построении «диаграммы Ньютона», а дальше Ньютон описывает построение «многоугольника Ньютона» (мы продолжаем прерванную цитату):

«... и приложи линейку к двум или же, что случается иногда, к нескольким из отмеченных таким образом параллелограммов, из которых один является самым нижним в столбце AB слева, другой попадает на линейку справа, а все остальные, не касающиеся линейки, находятся над ней...»

Как мы определяем многоугольник Ньютона

Мы видим, что Ньютон прикладывает линейку к множеству $Д(P)$, удовлетворяя двум условиям:

(I) *Не менее двух точек $Д(P)$ попадает на линейку.*

(II) *Множество $Д(P)$ лежит по одну сторону линейки.*

Рассмотрим *выпуклую оболочку* множества $Д(P)$, то есть наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все точки $Д(P)$. Этот многоугольник мы будем обозначать через $F(P)$ и называть многоугольником Ньютона многочлена $P(x, y)$. Многоугольник Ньютона многочлена (2) изображен на рисунке 3. Связь многоугольника $F(P)$ с методом Ньютона прикладывания линейки совершенно ясна. Если приложить линейку к любой стороне многоугольника Ньютона, то будут выполняться свойства (I) и (II). Обратно, если линейка приложена к множеству $Д(P)$ так, что выполняются (I) и (II), то линейка обязательно идет вдоль одной из сторон многоугольника $F(P)$.

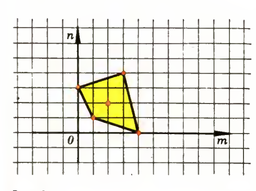


Рис. 3.

Несколько простых упражнений по многоугольнику Ньютона

Чтобы освоиться с определением многоугольника Ньютона, читателю стоит выполнить следующие

Упражнения.

1. Нарисуйте диаграмму Ньютона и многоугольник Ньютона для многочленов: x, $x+y$, $1+x+xy$, $x^2+x^2y+x^5y^7+x^{10}$, $(1+x+x^3)\ (1+y^4)$ *).

2. Докажите, что $F(\lambda P)=F(P)$ при $\lambda\neq 0$. Докажите, что $Д(P_1+P_2)\subset Д(P_1)\cup Д(P_2)$. Верно ли, что $F(P_1+P_2)=F(P_1)\cup F(P_2)$?

3. Пусть $Q(x, y)=P(x^a, y^b)$, где a и b — натуральные числа. Как связаны между собой многоугольники $F(P)$ и $F(Q)$?

4. Придумайте определение диаграммы Ньютона и *многогранника Ньютона* для многочлена от трех переменных.

Естественно спросить, а как связан многоугольник Ньютона произведения многочленов с многоугольниками Ньютона сомножителей? Оказывается, операция, которую нужно проделать с $F(P_1)$ и $F(P_2)$, чтобы получить $F(P_1\cdot P_2)$, хорошо изучена в геометрии и носит специальное название: *сумма Минковского.*

5. Докажите, что $F(P_1\cdot P_2)=F(P_1)+F(P_2)$, где «+» — сумма Минковского (см. статью Н. Васильева «Сложение фигур», «Квант», 1976, № 4).

Это свойство многоугольника Ньютона обобщает известное свойство степени многочлена: при перемножении многочленов их степени складываются. Именно это свойство помогает использовать многочлены при решении чисто геометрических задач.

§ 2. Зачем Ньютону понадобился «многоугольник Ньютона»?

Ньютон решал уравнение $P(x, y)=0$, где P — многочлен от x, y. Под решением он понимал точное или приближенное выражение y через x. Как это было принято в его время, Ньютон не объясняет своего метода в общем виде, а поясняет его на конкретных примерах. Продолжим цитату, прерванную в § 1:

«...Затем возьми все те члены уравнения, которые содержатся в параллелограммах, задетых линейкой, и найди из них величину, которую следует получить в результате. Так, если нужно определить корень

---

*) Первые два примера показывают, что многоугольник Ньютона многочлена $P(x, y)$ может и не быть настоящим многоугольником, т. е. может сводиться к точке или отрезку.

уравнения

$$y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}\; y^4 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0, \quad (3)$$

то я обозначаю, как видишь (см. рис. 2), параллелограммы, соответствующие членам этого уравнения, звездочкой. Затем я прикладываю линейку DE к самому нижнему из отмеченных параллелограммов в первом столбце слева, вращаю линейку снизу вверх в правую сторону, пока она не пройдет через какой-нибудь один или несколько различных отмеченных параллелограммов. При этом я вижу, что линейка задеет те места, в которых содержатся члены x^3, $xxyy$ и y^6. Поэтому я составляю из них уравнение

$$y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 = 0$$

(которое, если угодно, я затем, полагая $y = u\sqrt{ax}$, привожу к $u^6 - 7uu + 6 = 0$) и из него нахожу y, который имеет четыре значения, а именно:

$$+\sqrt{ax}, -\sqrt{ax}, +\sqrt{2ax}, -\sqrt{2ax} \ldots»$$

Ньютон подробно объясняет, что найденные решения не точные, а приближенные (тем более точные, чем ближе x и y к нулю). Он также указывает, как получить точное решение, прибавляя к уже найденному решению конечное или бесконечное число поправочных членов. За недостатком места мы не будем приводить соответствующие выдержки из трудов Ньютона.

В чем же состоит метод Ньютона приближенного решения уравнения P (x, y) = 0 при малых x и y?

В общем виде метод Ньютона можно (несколько схематично) объяснить следующим образом.

Мы хотим для достаточно малых x и y решить (приближенно) уравнение $P(x, y) = 0$ (или нарисовать приближенно множество $P(x, y) = 0$). Пусть γ — «обращенная к началу координат» сторона многоугольника $F(P)$ (такие стороны на рисунке 4 выделены красным). Обозначим через $P_\gamma(x, y)$ сумму взятых со старыми коэффициентами одночленов, входящих в $P(x, y)$ и отвечающих точкам γ. Пусть угловой коэффициент ребра γ равен $-k$, где $k > 0$. Положив $y = ux^{\frac{1}{k}}$ в уравнении $P_\gamma(x, y) = 0$, мы получим уравнение $x^l Q(u) = 0$, где Q — некоторый многочлен от u. Пусть $u_1, u_2, \ldots$ — ненулевые корни Q. Тогда $y_1 = u_1 x^{\frac{1}{k}}$, $y_2 = u_2 x^{\frac{1}{k}}$, ... — это точные решения уравнения $P_\gamma(x, y) = 0$ и приближенные решения уравнения $P(x, y) = 0$. Объединив такие решения по всем «обращенным к нулю» ребрам γ многоугольника $F(P)$, мы получим все нетривиальные *) приближенные решения уравнения $P(x, y) = 0$ при малых x и y. Доказательство последней фразы и даже объяснение ее точного смысла завели бы нас слишком далеко. Наша скромная цель — научить читателя практически находить приближенные решения уравнения $P(x, y) = 0$ (или, что то же самое, рисовать приближенно множество $P(x, y) = 0$) при малых x и y.

Учимся работать с многоугольником Ньютона

У многоугольника Ньютона многочлена (2) к нулю обращены стороны γ_1 и γ_2 (рис. 4). Начнем со стороны γ_1: $P_{\gamma_1} = xy + 0{,}5x^4$. Замена $y = ux^3$ приводит уравнение $P_{\gamma_1} = 0$ к виду $x^4(u + 0{,}5) = 0$, откуда $y = -0{,}5x^3$. Далее, $P_{\gamma_2} = xy - y^3$; замена $y = ux^{1/2}$ приводит уравнение $P_{\gamma_2} = 0$ к виду $x^{3/2}(u - u^3) = 0$, откуда $y = -\sqrt{x}$ и $y = +\sqrt{x}$. Впрочем, последние два решения мож-

*) *Тривиальными* называются решения вида $x = 0$ или $y = 0$.

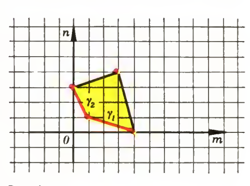


Рис. 4.

но объединить: $x = y^2$. Итак, мы получили, что при малых x и y уравнение $P(x, y) = 0$, где P задан формулой (2), имеет два приближенных решения: $y = -0{,}5x^3$ и $x = y^2$. (Тривиальных решений в этом случае нет, так как P не делится ни на x, ни на y.) Вид приближенных решений показан на рисунке 5. Этот же рисунок при малых x и y можно рассматривать как приближенный рисунок множества $P(x, y) = 0$.

Упражнение 6. Решите приближенно уравнение $x^5y + x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^4 + y^7 + 2x^4y^2 + 3x^6y^3 - x^5y^5 + x^6y^6 + 7x^2y^8 = 0$ при малых x и y (см. рис. 6).

Ньютон указал также способ, с помощью которого можно решить уравнение $P(x, y) = 0$ при очень больших x и y.

Упражнение 7. Придумайте, как с помощью многоугольника Ньютона решить (приближенно) уравнение $P(x, y)$ при очень больших x и y.

§ 3. Число решений системы двух уравнений с двумя неизвестными и многоугольник Ньютона

Теорема Безу

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными x, y:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

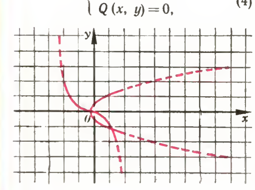


Рис. 5.

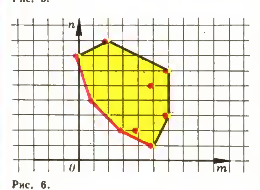


Рис. 6.

где P и Q — многочлены с действительными коэффициентами. Если P и Q — многочлены первой степени *), то число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит 1. Если P — многочлен первой степени, а Q — многочлен степени N, то, как легко видеть, число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит N. Немного сложнее доказать, что если P — многочлен второй степени, а Q — многочлен степени N, то число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит $2 \cdot N$. После этих примеров читателя не удивит формулировка хорошо известной еще в прошлом веке теоремы.

Теорема Безу. *Если P — многочлен степени M, а Q — многочлен степени N, то число решений системы (4) либо бесконечно, либо не превосходит $M \cdot N$.*

Можно ли усилить теорему Безу?

Вообще говоря, нельзя: число $M \cdot N$ в формулировке теоремы Безу ни при каких M и N не может быть заменено меньшим числом, так как существуют примеры систем, имеющих ровно $M \cdot N$ решений (например, система $(x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-M) = (y-1)(y-2) \cdot \ldots \cdot (y-N) = 0$).

Во многих практических случаях, однако, теорема Безу дает явно завышенную оценку для числа решений системы (4).

Пример. $P = a + bx + cx^2y^2$, $Q = d + ey + fx^2y^2$. Теорема Безу утверждает, что если число решений системы $P = Q = 0$ конечно, то оно не превосходит 16. Между тем, решая эту систему непосредственно, легко получить, что если число решений конечно, то оно не превосходит 4.

Этот пример и другие более сложные примеры приводят к мысли обобщить теорему Безу. Ясно, что при этом мы должны заменить понятие степени многочлена каким-то более сложным понятием, полнее учитывающим свойства многочленов. В каче-

*) Напомним, что степень многочлена (иногда говорят — полная степень) — это максимум числа $m + n$ по всем одночленам x^my^n, входящим в многочлен.

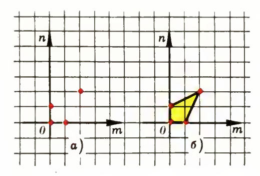


Рис. 7.

стве такого обобщения степени мы возьмем *многоугольник Ньютона системы.*

Пусть $Д(P)$ — диаграмма Ньютона многочлена P и $Д(Q)$ — диаграмма Ньютона многочлена Q. Положим $Д = Д(P) \cup Д(Q)$. $Д$ — конечное множество на плоскости Omn. Точка $M(m_0; n_0)$ принадлежит $Д$, если одночлен $x^{m_0}y^{n_0}$ входит с ненулевым коэффициентом хотя бы в один из многочленов P и Q. Снова через F обозначим выпуклую оболочку множества $Д$, то есть — наименьший выпуклый многоугольник в плоскости Omn, содержащий все точки $Д$. Многоугольник F мы назовем *многоугольником Ньютона системы* (4). (Если в нашем примере коэффициенты $a, b, \ldots, f$ многочленов P и Q отличны от нуля, то множество $Д$ и многоугольник F системы (4) такие, как на рисунках 7, *а*, *б*.)

Нельзя ли, пользуясь какими-нибудь характеристиками многоугольника F, оценить сверху число решений системы (4)?

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1. *Число ненулевых действительных решений системы* (4) *либо бесконечно, либо не превосходит удвоенной площади многоугольника Ньютона этой системы* (решение $(x_0; y_0)$ системы (4) называется ненулевым, если $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$).

Теорема 1 принадлежит автору настоящей статьи. Доказательство ее косвенное: предварительно доказывается теорема, в которой используется не площадь многоугольника F, а другие его характеристики — именно, число целых точек в многоугольнике F и в «удвоенном многоугольнике» $2F$. Таким образом, при работе с многоугольниками Ньютона возникают любопытные геометрические вопросы про целые точки в многоугольниках. Еще более интересные вопросы возникают в связи с многогранниками Ньютона. Подробно обо всем этом рассказано в статье «Целые точки в многоугольниках и многогранниках» («Квант», 1977, № 4).

Можно ли улучшить теорему 1?

Теорема 1 дает хорошую оценку для числа решений в тех случаях, когда многоугольники $F(P)$ и $F(Q)$ совпадают или достаточно близки (в противном случае оценка получается слишком грубая: рассмотрите систему $x^n + y^{n+1} = y^n + y^{n+1} = 0$). Для получения более точной оценки нужно рассмотреть $Д(P)$ и $Д(Q)$ порознь, как это сделал Д. Н. Бернштейн, который обобщил теорему 1 следующим образом.

Теорема 2. *Пусть A — многоугольник Ньютона многочлена P, B — многоугольник Ньютона многочлена Q и C — многоугольник Ньютона многочлена $P \cdot Q$. Тогда число ненулевых решений системы* (4) *либо бесконечно, либо не превосходит числа* $S(C) - S(A) - S(B)$. (Здесь через S обозначена площадь соответствующего многоугольника.)

Многоугольник C есть не что иное, как сумма Минковского многоугольников A и B, а для числа $S(C) - S(A) - S(B)$ в геометрии имеется специальное название: *смешанная площадь* многоугольников A и B (см. упражнение 5 и цитированную там статью Н. Васильева).

Упражнения

8. Примените теорему 1 к многочлену (2) и многочленам из упражнения 1.

9. Оцените по теореме Безу и по теореме 1 число решений системы $x^3+y^4=axy+bx^2y^2+cx^3y^2+dx^4y^3$ при $a\neq0$ и $d\neq0$.

10. Обобщите теорему 1 на случай системы трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными x, y, z.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаак Ньютон, *Математические работы. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых.* Перевод с латинского Д. Мордухай-Болтовского, ОНТИ, 1937, с. 33—34.

2. Исаак Ньютон, *Второе письмо Ньютона к Ольденбургу, подлежащее сообщению Лейбницу. 24 октября 1976 года,* Там же, с. 251—252.

3. Н. Г. Чеботарев, *Собрание сочинений. Т. 3. «Многоугольник Ньютона» и его роль в современном развитии математики»,* Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, с. 47—80

В. Кресин

Адиабатный процесс

Различные разделы физики тесно связаны между собой. Можно привести немало иллюстрирующих примеров. Так, в данной статье рассказывается об одном из важнейших процессов, изучаемых в молекулярной физике, — адиабатном процессе. При этом процессе изменяется температура газа. Нас будет интересовать механизм изменения температуры; для этого потребуются некоторые сведения из механики. Поэтому мы и начнем с одной механической задачи.

Отражение от движущейся стенки

Рассмотрим такое механическое явление: шарик подлетает к стенке со скоростью $\vec{v}$ и после абсолютно упругого удара меняет направление своего движения. Для простоты ограничимся случаем нормального падения шарика на стенку.

Если стенка неподвижна, то ясно, что после удара направление скорости движения шарика изменится на противоположное, а абсолютная величина ее $|\vec{v}|$ останется неизменной.

Усложним теперь нашу задачу: шарик подлетает к движущейся стенке. Предположим, что стенка движется навстречу шарику со скоростью $\vec{u}$ (рис. 1). С какой скоростью в этом случае будет двигаться шарик после столкновения? Для того чтобы ответить на этот вопрос, сведем задачу к известной — соударение шарика с неподвижной стенкой. Другими словами, будем рассматривать явление в системе отсчета, связанной со стенкой. С точки зрения наблюдателя в этой системе отсчета скорость приближающегося к стенке шарика будет другой, а именно $|\vec{v}'| = |\vec{v}| + |\vec{u}|$. После отражения (напомним, что в рассматриваемой системе отсчета стенка покоится) скорость изменит направление, а по абсолютной величине останется прежней. Для окончательного решения задачи снова перейдем в неподвижную систему отсчета, связанную, например, с землей. Скорость удаляющегося от стенки шарика равна $|\vec{v}| + |\vec{u}|$ относительно стенки, а сама стенка движется относительно земли со скоростью $|\vec{u}|$. Следовательно, скорость шарика относительно земли равна $|\vec{v}| + 2|\vec{u}|$.

Таким образом, в результате упругого отражения от движущейся стенки скорость шарика возрастает на удвоенную скорость стенки.

На этом мы заканчиваем рассмотрение вспомогательной механической задачи и переходим к основному вопросу — описанию адиабатного процесса.

Механизм изменения температуры при адиабатном процессе

Пусть в цилиндре под поршнем находится идеальный газ (рис. 2). Движение поршня AB позволяет производить как сжатие, так и расшире-

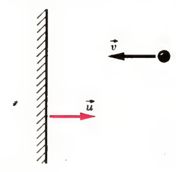


Рис. 1.

ние газа. Как известно, изменение объема газа может происходить при различных процессах, сопровождающихся изменением и других его параметров. Адиабатный процесс характеризуется отсутствием теплообмена с окружающей средой: к газу не подводится и от него не отводится теплота. При адиабатном процессе изменяется температура газа. Если газ адиабатно сжимать, его температура увеличивается, а если расширять — уменьшается. (Заметим, что при этом давление газа тоже изменяется.)

С чем связано изменение температуры при адиабатном процессе? Для ответа на этот вопрос проанализируем сначала (как это и делается обычно) адиабатный процесс с точки зрения закона сохранения энергии, а затем — на основе молекулярно-кинетических представлений. При описании процесса на молекулярном уровне и становится ясной связь с рассмотренной выше механической задачей об отражении шарика от движущейся стенки.

Предположим, газ адиабатно расширяется. При расширении он совершает работу по подъему поршня. Поскольку система теплоизолирована, то, согласно закону сохранения энергии, эта работа производится только за счет внутренней энергии газа. Таким образом, внутренняя энергия газа должна уменьшаться при его адиабатном расширении.

Внутренняя энергия идеального газа складывается из кинетических энергий его молекул. Уменьшение внутренней энергии возможно только при уменьшении кинетической энергии молекул газа, а температура газа и является мерой средней кинетической энергии молекул. Поэтому ясно, что адиабатное расширение должно сопровождаться охлаждением газа. С помощью аналогичных рассуждений легко показать, что при адиабатном сжатии газ должен нагреваться.

Таким образом можно установить количественные связи между температурой и объемом, давлением и объемом, характерные для адиабатного процесса. Мы же получим соответствующие формулы несколько позже, рассматривая механизм адиабатного процесса.

Как объяснить изменение температуры при адиабатном процессе с точки зрения молекулярно-кинетической теории? Почему, например, при опускании поршня увеличивается средняя скорость движения молекул, а значит, и температура газа? Каков механизм увеличения скорости? Постараемся ответить на эти вопросы.

Молекулы газа, заполняющего сосуд (см. рис. 2), совершают хаотическое тепловое движение. При этом, конечно, непрерывно происходят столкновения молекул между собой и со стенками сосуда. Для идеального газа эти столкновения описываются обычными законами механики упругого удара. При сжатии газа поршень движется вниз, и молекулы теперь сталкиваются с движущимся поршнем. Но ведь именно эта картина и обсуждалась нами в первой части статьи, где рассказывалось об отражении шарика от движущейся стенки.

Итак, молекулы ударяются о движущийся поршень и отражаются от него. При этом проекции скорости в направлении, перпендикулярном поршню, возрастают на $2|\vec{u}|$, где $\vec{u}$ — скорость движения поршня. В дальнейшем межмолекулярные соударения приводят к тому, что средняя скорость хаотического теплового движения возрастает. При этом, естественно, увеличивается и температура газа. Таков молекулярно-кинетический механизм нагревания газа при адиабатном сжатии.

Аналогично можно рассмотреть и адиабатное расширение. В этом случае понижение температуры газа свя-

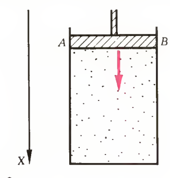


Рис. 2.

зано с уменьшением скорости молекул при отражении их от удаляющегося поршня.

Основной закон адиабатного процесса

При адиабатном процессе изменение объема идеального газа сопровождается изменением его температуры. Основная задача этого раздела статьи — получить формулу, связывающую температуру и объем при адиабатном процессе. Для этого воспользуемся молекулярно-кинетической картиной этого процесса.

Рассмотрим движение какой-нибудь молекулы одноатомного идеального газа. Пусть ее скорость равна $\vec{v}$ и кинетическая энергия

$$\varepsilon = \frac{m|\vec{v}|^2}{2}.$$

Движение молекулы в пространстве можно представить в виде трех независимых движений по осям X, Y и Z. (В этом смысле говорят о трех степенях свободы молекулы.) С каждым из этих независимых движений связаны соответствующие проекции v_x, v_y и v_z скорости молекулы. Тогда выражение для кинетической энергии можно записать так:

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}. \qquad (1)$$

Нас будут интересовать столкновения молекул с опускающимся поршнем (для определенности рассмотрим случай адиабатного сжатия). Поэтому мы будем говорить только о движении вдоль оси X (см. рис. 2). Пусть поршень опускается со скоростью $\vec{u}$. Величина энергии ε_x после столкновения с поршнем становится равной

$$\varepsilon_x' = \frac{m(|v_x| + 2|\vec{u}|)^2}{2},$$

а изменение энергии

$$\Delta\varepsilon_x = \varepsilon_x' - \varepsilon_x = 2m|v_x||\vec{u}| + 2m|\vec{u}|^2.$$

Обычно $|\vec{u}| \ll |v_x|$. Тогда в выражении для $\Delta\varepsilon_x$ можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым и считать

$$\Delta\varepsilon_x = 2m|v_x||\vec{u}|. \qquad (2)$$

Формула (2) описывает изменение энергии одной молекулы в результате одного столкновения с поршнем. Каково же изменение в единицу времени всей внутренней энергии рассматриваемого идеального газа? Для ответа на этот вопрос мы должны просуммировать изменения энергии всех молекул, столкнувшихся в течение секунды с опускающимся поршнем. Обозначим через N число молекул газа в сосуде, через V — объем сосуда и через S — площадь поршня. Для простоты рассуждений будем считать, что все молекулы газа характеризуются одним и тем же численным значением проекции скорости v_x (в дальнейшем мы внесем необходимые коррективы). При этом в любой момент времени половина молекул движется к поршню, а вторая половина — от него (иначе было бы смещение всего газа как целого). В течение 1 *сек* столкновения испытают лишь те молекулы, которые, во-первых, движутся к поршню и, во-вторых, находятся от него на расстоянии, не превышающем $|v_x|$ *), то есть число молекул, испытавших соударения, равно

$$N' = \frac{1}{2}\frac{N}{V}|v_x|S. \qquad (3)$$

У всех N' молекул энергия после соударения с поршнем изменяется на величину $\Delta\varepsilon_x = 2m|v_x||\vec{u}|$ (см. формулу (2)). Таким образом, полное изменение энергии газа в единицу времени

$$\Delta E = N'\Delta\varepsilon_x = \frac{1}{2}\frac{N}{V}|v_x|S \cdot 2m|v_x||\vec{u}| = 2\frac{N}{V}\frac{m|v_x|^2}{2}|\vec{u}|S. \qquad (4)$$

*) Более строго это расстояние равно $|v_x| + |\vec{u}|$, но мы воспользуемся тем, что $|\vec{u}| \ll |v_x|$.

Ясно, что величина $|\vec{u}|S$ численно равна, но противоположна по знаку изменению объема сосуда: $|\vec{u}|S = -\Delta V$. Тогда

$$\Delta E = -2\frac{N}{V}\frac{m|v_x|^2}{2}\Delta V = -2N\varepsilon_x\frac{\Delta V}{V}. \qquad (5)$$

Мы считали, что все молекулы характеризуются одним и тем же значением проекции скорости v_x. Конечно, это предположение не соответствует действительности. На самом деле все молекулы движутся с различными скоростями, и реально наблюдается значительный разброс значений ε_x. Поэтому в выражении (5) вместо энергии ε_x надо взять среднее по всем молекулам значение энергии $\overline{\varepsilon_x}$:

$$\Delta E = -2N\overline{\varepsilon_x}\,\frac{\Delta V}{V}. \qquad (6)$$

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа, содержащего N молекул, равна

$$E = \frac{3}{2}NkT, \qquad (7)$$

где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура газа. Величина $\frac{3}{2}kT$ и представляет собой среднее значение энергии молекулы одноатомного идеального газа. Поскольку движение молекул складывается из трех независимых равноправных движений (по трем осям координат), ясно, что $\overline{\varepsilon_x} = \frac{kT}{2}$. Подставим это значение в выражение (6):

$$\Delta E = -NkT\frac{\Delta V}{V}. \qquad (8)$$

Запишем теперь иное выражение для ΔE. Воспользуемся формулой (7) для внутренней энергии идеального газа. При адиабатном сжатии температура газа изменяется. Пусть при изменении объема на ΔV температура газа изменилась на ΔT. Тогда внутренняя энергия газа, содержащего те же N молекул, равна $E' = \frac{3}{2}Nk(T + \Delta T)$, и изменение внутренней энергии

$$\Delta E = \frac{3}{2}Nk\Delta T. \qquad (9)$$

Приравняв правые части выражений (8) и (9), придем к следующему равенству:

$$-NkT\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}Nk\Delta T, \qquad (10)$$

или

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}. \qquad (11)$$

Формула (11) устанавливает связь между температурой, объемом и их изменениями при адиабатном процессе.

Возникает вопрос: как должны быть связаны между собой температура T и объем V газа, чтобы при их изменениях соответственно на ΔT и ΔV выполнялось равенство (11)? Оказывается, эта связь при любых T и V должна иметь вид *)

$$\ln T = -\frac{2}{3}\ln V + \text{const}, \qquad (12)$$

где ln — натуральный логарифм, то есть логарифм по основанию $e \approx 2{,}72$.

---

*) Десятиклассники могут в этом убедиться самостоятельно (см., например, «Алгебру и начала анализа 10», п. 114). Для остальных читателей приведем проверку того, что из выражения (12) действительно получается выражение (11).

В самом деле, пусть температура и объем изменились на малые величины ΔT и ΔV соответственно. Тогда из выражения (12) следует:

$$\ln(T + \Delta T) = -\frac{2}{3}\ln(V + \Delta V) + \text{const},$$

или

$$\ln T + \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) = -\frac{2}{3}\ln V - \frac{2}{3}\ln\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right) + \text{const}.$$

С учетом равенства (12) получаем

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) = -\frac{2}{3}\ln\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right).$$

Теперь воспользуемся приближенной формулой: при малых α $\ln(1+\alpha) \approx \alpha$, тогда

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}.$$

Таким образом, температура и объем при адиабатном процессе связаны формулой (12), которая легко приводится к виду

$$\ln(TV^{2/3}) = \text{const},$$

или

$$TV^{2/3} = \text{const}. \qquad (13)$$

Это и есть окончательная искомая формула, выражающая основной закон адиабатного процесса для одноатомного идеального газа: $T \sim \frac{1}{V^{2/3}}$.

Показатель степени 2/3, фигурирующий в выражении (13), имеет определенный физический смысл. Можно показать (см. Приложение), что

$$\frac{2}{3} = \frac{C_p}{C_V} - 1,$$

где C_p — теплоемкость газа, если его нагрев происходит при постоянном давлении, а C_V — теплоемкость газа при постоянном объеме. Поэтому закон, описывающий адиабатный процесс (выражение (13)), обычно записывают в виде

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \qquad (14)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.

Мы рассмотрели подробно адиабатный процесс для *одноатомных* газов. Но оказывается, уравнение (14) описывает адиабатный процесс и в случае *многоатомных* газов. Изменяется только значение величины γ. Например, для *двухатомных* газов $\gamma - 1 = \frac{2}{5}$ (а не 2/3, как для одноатомных газов). Это связано с тем, что для двухатомных газов внутренняя энергия $E = \frac{5}{2}NkT$ $\left(\text{а не } \frac{3}{2}NkT\right)$. Двухатомные молекулы могут совершать не только поступательное движение, но и вращение вокруг осей, проходящих через центр молекул. С этим вращением тоже связана определенная энергия. Вот почему показатель степени $\gamma - 1$ оказывается иным: $\gamma - 1 = \frac{2}{5}$. Предлагаем читателям самостоятельно получить это значение.

Приложение

Величина теплоемкости вещества зависит не только от его природы или температуры, но и от того, при каких условиях происходит процесс нагревания. Например, при нагревании в закрытом сосуде не изменяется объем газа, а в сосуде, закрытом подвижным поршнем остается неизменным давление. При этом подводимое тепло расходуется не только на увеличение внутренней энергии газа, но на совершение работы по расширению. Теплоемкость в этих двух случаях различна. В первом случае ее называют теплоемкостью при постоянном объеме и обозначают C_V, а во втором — теплоемкостью при постоянном давлении C_p. Ясно, что $C_p > C_V$. Найдем разность этих величин.

Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты Q, подводимое к газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа ΔE и работы газа A:

$$Q = \Delta E + A.$$

Для одноатомных газов изменение внутренней энергии $\Delta E = \frac{3}{2}Nk\Delta T$. Работа газа A при малых изменениях объема ΔV равна $A = p\Delta V$ (p — давление газа). Поэтому

$$Q = \frac{3}{2}Nk\Delta T + p\Delta V,$$

и теплоемкость газа

$$C \doteq \frac{Q}{\Delta T} = \frac{3}{2}Nk + p\frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Если объем газа не изменяется, то его теплоемкость

$$C_V = \frac{3}{2}Nk.$$

Если же неизменным остается давление, то

$$C_p = \frac{3}{2}Nk + p\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}Nk + \frac{\Delta(NkT)}{\Delta T} = \frac{5}{2}Nk$$

(мы воспользовались основным уравнением состояния идеального газа $pV = NkT$). Отсюда

$$C_p - C_V = Nk.$$

Тогда формулу (10) можно записать в виде

$$-(C_p - C_V)T\frac{\Delta V}{V} = C_V\Delta T,$$

или

$$\frac{\Delta T}{T} = -\left(\frac{C_p}{C_V} - 1\right)\frac{\Delta V}{V} = -(\gamma - 1)\frac{\Delta V}{V},$$

откуда окончательно получаем

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Н. Васильев, А. Толпыго

Плавные последовательности

В этой заметке мы обсудим характерные соображения, возникающие при решениях задач, где на последовательность или функцию наложены некоторые л о к а л ь н ы е ограничения — ей запрещено резко меняться или круто поворачивать — и требуется оценить, насколько большим может оказаться ее колебание в ц е л о м.

Игра «гонки» и вторые разности

Вероятно, многие из наших читателей знают игру «гонки», описанную в книге М. Гарднера. «Математические новеллы».

Напомним правила игры. На клетчатой бумаге рисуется более-менее произвольная изогнутая область (трек), у одного края трека для каждого игрока отмечается своя точка с т а р т а, у другого края — линия ф и н и ш а. Автомобилисты по очереди делают ходы в один из узлов сетки, причем изменять скорость разрешается только на единицу: если предыдущий ход автомобилиста был $\overrightarrow{AB}$, то следующий ход $\overrightarrow{BC}$ либо точно такой же ($\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$), либо заканчивается в одном из восьми соседних с C узлов. Ходить можно только по отрезкам, целиком лежащим в пределах трека: тот, кто слишком «разогнался» и вылетел за границу, пропускает ход и начинает с единичной скоростью (так же проводится и старт, рис. 1).

По сравнению с другими играми на клетчатой бумаге (например, с «морским боем») эта игра замечательна не только близостью к реальной ситуации, но и разнообразием: ведь каждый новый трек — это новая игра.

Найти наиболее удачный путь на сложном треке — задача далеко не простая. Такие задачи очень характерны для теории оптимального управления — сравнительно молодой и быстро развивающейся области математики. Мы не будет касаться общих соображений, относящихся к этой теории, а рассмотрим одну конкретную задачу, навеянную игрой «гонки».

З а д а ч а 1. *На клетчатой бумаге на одной горизонтальной линии сетки l отмечен отрезок A_0A_1 длины* 1 *(сторона одной клетки). Нужно, начав с этого отрезка, построить путь, в котором:*

1) *каждый следующий шаг $A_k A_{k+1}$ либо такой же, как предыдущий* ($\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$), *либо отличается от него на одну единицу в в е р х или в н и з* (в отличие от «гонок», скорость смещения вправо всегда остается одинаковой: 1 клетка за каждый шаг);

2) *последний отрезок A_nA_{n+1} лежит на той же прямой, что и первый A_0A_1.*

На какую наибольшую высоту, при заданном n, может подняться такой путь над прямой l?

Эту задачу легко, конечно, сформулировать и без клетчатой бумаги. Если считать, что отрезки A_0A_1 и A_nA_{n+1} — это отрезки $[0, 1]$ и $[n, n+1]$ оси Ox (рис. 2), то путь впол-

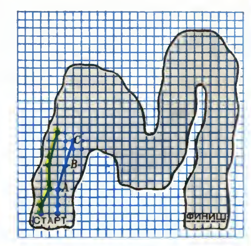


Рис. 1.

не определяется последовательностью координат $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$ точек $A_k = (k; y_k)$, причем эта последовательность должна удовлетворять таким условиям:

а) разность разностей $y_{k+1} - y_k$ и $y_k - y_{k-1}$ соседних членов последовательности, т. е. *вторая разность*

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = \\ = (y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})$$

при каждом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, не превосходит 1;

б) $y_0 = y_1 = y_n = y_{n+1} = 0$, а все другие y_k — целые числа. В задаче спрашивается, *какое наибольшее значение может иметь наибольший член этой последовательности.*

Путь, о котором говорится в первой формулировке, — в некотором смысле «график» последовательности $\{y_k\}$. Даже если бы мы начали сразу с алгебраической формулировки, его очень полезно было бы «выдумать»: он помогает наглядно представить смысл условия а).

Перейдем к р е ш е н и ю задачи.

Чтобы удовлетворить условию 1), «верхушка» ломаной A_mA_{m+1} должна быть горизонтальной. Ясно, что можно рассматривать только симметричные пути: если A_mA_{m+1} — самое верхнее звено, то более длинную из частей $A_1 \ldots A_m$ и $A_{m+1} \ldots A_n$ можно укоротить, заменив ее симметричным отражением другой части относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_mA_{m+1}. Итак, достаточно рассматривать лишь участок п о д ъ е м а (отведя на него не более $n/2 - 1$ наклонных шагов) — с п у с к будет точно таким же.

Кстати, отсюда видно, что для ч е т н о г о n максимальная высота подъема — обозначим ее h_n — будет такой же, как и для следующего за ним нечетного числа: $h_n = h_{n+1}$.

Если подниматься и опускаться под углом 45°, то максимальная высота, как нетрудно проверить, будет $[^n/_2] - 1$. Но такой способ будет наилучшим лишь до $n = 7$ (рис. 3, *а*). На рисунке 3, *б* показан путь для $n = 8$, который поднимается на высоту 4 (а не на $[^8/_2] - 1 = 3$).

Найти оптимальный путь нам еще раз помогут соображения симметрии. Ясно, что поначалу выгодно максимальным образом наращивать скорость подъема: $1+2+3+\ldots$; но — чтобы успеть затормозить — так можно поступать лишь до середины участка подъема $[1; m]$ (рис. 4, 5).

Эти соображения можно строго оформить так. Оценим разности одновременно с двух сторон участка:

$$\begin{aligned} &y_1 - y_0 = 0, && y_{m+1} - y_m = 0,\\ &y_2 - y_1 \leqslant 1, && y_m - y_{m-1} \leqslant 1,\\ &y_3 - y_2 \leqslant 2, && y_{m-1} - y_{m-2} \leqslant 2,\\ &y_4 - y_3 \leqslant 3, && y_{m-2} - y_{m-3} \leqslant 3,\\ &\ldots && \ldots \end{aligned}$$

Теперь, чтобы получить оценку для наибольшей высоты h_n подъема, т. е. величины $y_m - y_0 = y_{m+1} - y_0$, нужно сложить оценки первых разностей. Таким образом,

для $n = 4k - 2$ (например, $n = 18$, рис. 4)

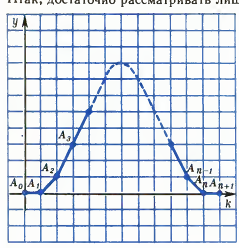


Рис. 2.

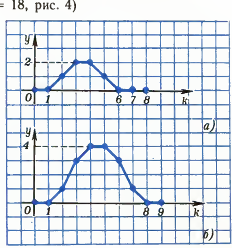


Рис. 3.

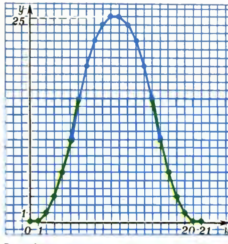


Рис. 4.

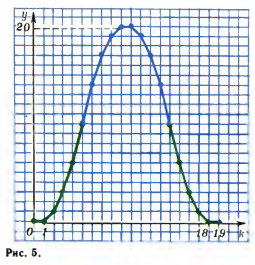


Рис. 5.

$h_n \leqslant 1 + 2 + \ldots + (k - 1) + (k - 1) + \ldots + 2 + 1 = k(k - 1)$;
для $n = 4k$ (например, $n = 20$, рис. 5)

$h_n \leqslant 1 + 2 + \ldots + (k - 1) + k + (k - 1) + \ldots + 2 + 1 = k(k - 1) + k = k^2$.

Ясно — из тех же рисунков, — что эти оценки точные, т. е. что такую высоту подъема можно реализовать. В частности, $h_{18} = 20$, $h_{20} = 25$.

Итак, мы нашли наибольшую высоту h_n при любом n. Проверьте, что ответ можно записать в такой компактной форме: $h_n = [n/4] \times [(n+2)/4]$, или, еще короче, $h_n = [[n/2]^2/4]$. (Напомним, что $h_{n+1} = h_n$ при четном n.) Значит, при любом n достаточно точную оценку сверху для h_n дает неравенство $h_n \leqslant n^2/16$.

Заметим еще, что вершины *оптимальной траектории* в каждой ее четвертой части лежат на одной п а р а б о л е. Это происходит не случайно. Ведь если последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_m$ — арифметическая прогрессия (в частности, отрезок натурального ряда), а у последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_m$ вторые разности $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$ равны между собой, то точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, ..., $(x_m; y_m)$ лежат на одной параболе*). Именно так обстоит дело в нашем случае (рис. 4, 5): в первой и последней четвертях траектории $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 1$, а в средних четвертях $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = -1$.

Мы увидим, что и в других задачах, где ограничения накладываются на вторые разности, оптимальная траектория также склеена из парабол.

Непрерывный аналог. Скорости и ускорения

З а д а ч а 2. *Электровоз, стоявший в точке О, тронулся с места, но, дав «задний ход», через n секунд снова вернулся в точку О и остановился в ней. На какое наибольшее расстояние h он мог удалиться за это время от точки О, если абсолютная величина его ускорения ни в какой момент не превышала а см/сек²?*

Эта задача — полный аналог задачи 1, с той разницей, что вместо д и с к р е т н о й последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_n$ теперь речь идет о функции $y(t)$ н е п р е р ы в н о г о аргумента t (здесь t — время; будем считать, что t пробегает отрезок от 0 до n). Аналогом первых разностей является скорость (первая производная $y'(t)$ от координаты $y(t)$), аналогом вторых разностей — ускорение (вторая производная $y''(t) = (y'(t))'$). Мы решим эту задачу, пользуясь физическими терминами; те, кто уже знаком с производной и интегралом, легко переведут условие задачи и ее решение на язык математического анализа.

Докажем, что о т в е т в этой задаче таков: $an^2/16$ (*см*).



*) Ср. «Квант», 1973, № 2, с. 28—29.

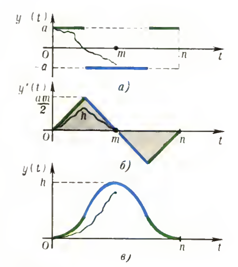


Рис. 6.

Пусть электровоз достиг самого далекого от точки O положения M в некоторый момент времени m, $0 \leqslant m \leqslant n$. Ясно, что скорость его в этот момент равна нулю. Можно считать, что $m \leqslant n/2$ (в случае $m > n/2$ мы будем следить за движением электровоза на отрезке времени от m до n, а не от 0 до m — ведь до и после момента m движение происходит совершенно аналогично).

Оценим скорость электровоза $v(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant m$. Поскольку $v(0) = 0$, то $v(t) \leqslant at$. С другой стороны, поскольку $v(m) = 0$, то $v(t) \leqslant a(m - t)$. Отсюда следует, что перемещение $h = |OM|$ — площадь под графиком скорости $v(t)$ на отрезке времени $[0, m]$ — не превышает площади треугольника с основанием m и высотой $am/2$, т. е. $h \leqslant am^2/4 \leqslant an^2/16$. Ясно, что эта оценка — точная, причем график оптимального перемещения в каждой четверти отрезка $0 \leqslant t \leqslant n$ — парабола (рис. 6, *а*—*в*).

Мы видим, что для «непрерывного» варианта (задачи 2) ответ и решение получаются более простыми, чем для «дискретного» (задачи 1).

Большинство реальных задач оптимального управления при их математическом оформлении также допускают и непрерывный, и дискретный варианты. При этом непрерывные модели обычно легче исследовать теоретически, и результаты имеют более красивую форму. Но иногда дискретность задачи диктуется существом дела или упрощает корректную постановку математической задачи; да и для расчетов на цифровых ЭВМ приходится переходить обычно к некоторому дискретному приближению непрерывной задачи.

В следующем пункте мы вновь вернемся к дискретной задаче, но теперь числа последовательности будут расположены на окружности.

Числа на окружности. Формулировка результата

Задача 3. *На окружности расположены n действительных чисел, одно из которых равно 1, а сумма всех равна 0. Доказать, что:*

а) найдутся два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$;

б) найдется число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $16/n^2$.

Далее мы очень кратко изложим решение, позволяющее получить для каждого n точные оценки в утверждениях а) и б). Эти наилучшие возможные оценки таковы:

а) максимальная из разностей между соседними числами не меньше $\frac{4}{n}$, если n четно, и не меньше $\frac{4n}{n^2-1}$, если n нечетно (заметим, что $\frac{4n}{n^2-1} > \frac{4}{n}$);

б) максимальное отклонение числа от среднего арифметического двух его соседей не меньше соответственно $\frac{16}{n^2}$, $\frac{16n}{n^3+n-2}$, $\frac{16}{n^2+4}$ или $\frac{16n}{n^3+n+2}$, если n дает при делении на 4 остаток 0, 1, 2 или 3.

На рисунках 7 и 8 изображены оптимальные последовательности (при $n=30$):

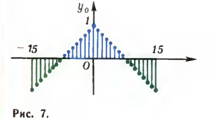


Рис. 7.

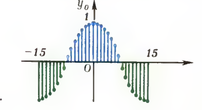


Рис. 8.

для последовательности на рисунке 7 разность между любыми двумя соседними числами не меньше 2/15 (это — $4/n$ при $n=30$); для последовательности на рисунке 8 отклонение каждого числа от среднего арифметического двух соседей не меньше 2/113 и, как и в первой задаче, точки в каждой четверти отрезка лежат на одной параболе. Доказательство результатов а) и б) мы проведем ниже лишь для $n=30$ (для других n оно примерно такое же). Тем самым мы получим решение цикла задач **М398** из «Задачника «Кванта» *).

Обозначим данные числа через y_{-14}, $y_{-13}, \ldots, y_{15}$ так, что $y_0=1$. Для задачи а) получить нужную оценку нетрудно: если $|y_{k+1}-y_k|\leqslant\alpha$ для всех $k=-14, \ldots, 15$, то, суммируя оценки разностей, как и в задаче 1, получим $y_k\geqslant 1-|k|\alpha$. Но сумма Σy_k равна нулю, поэтому

$$0=\Sigma y_k\geqslant 30-2(1+2+\ldots+14)\alpha-15\alpha= =30-15^2\alpha,$$

откуда $\alpha\geqslant 2/15$.

Перейдем к задаче б). Заметим, что величина $\dfrac{y_{k+1}+y_{k-1}}{2}-y_k$, которую мы должны оценить, — это просто половина «второй разности» $(y_{k+1}-y_k)-(y_k-y_{k-1})$.

Нормировка и повторение. Попробуем действовать с помощью двукратного применения задачи а).

Пусть $y_{k+1}-y_k=y'_k$, $\max\limits_k|y'_k|=\alpha$ **).

Согласно а), $\alpha\geqslant 2/15$. К последовательности $z_k=y'_k/\alpha$ мы можем вновь применить а) (нетрудно убедиться, что сумма всех 30 чисел z_k равна нулю и что максимальное из z_k равно единице); поэтому $\max\limits_k|z_{k+1}-z_k|\geqslant$ $\geqslant 2/15$, а следовательно,

$$\max_k\frac{|y_{k+1}-2y_k-y_{k-1}|}{2}=$$

$$=(\alpha/2)\max_k|z_k-z_{k-1}|\geqslant(1/15)\alpha\geqslant 2/225.$$

Эта оценка примерно вдвое хуже требуемой (в общем случае так же получится оценка $8/n^2$ вместо $16/n^2$).

Идея более тонкой оценки проста: нужно, исходя из оценки $|y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}|\leqslant 2\beta$ для вторых разностей, точнее оценить первые разности, затем оценить сами числа y_k (пользуясь тем, что $y_0=1$) и, наконец, из равенства $\Sigma y_k=0$ получить оценку снизу для β.

Симметризация и комбинированная оценка. Прежде чем перейти к осуществлению нашего плана, заметим, что можно ограничиться рассмотрением лишь симметричных последовательностей: таких, для которых $y_k=y_{-k}$. В самом деле, из любой последовательности y_k, удовлетворяющей условиям $y_0=1$, $\Sigma y_k=0$, $|y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}|\leqslant 2\beta$, мы можем получить симметричную последовательность $z_k=\dfrac{y_k+y_{-k}}{2}$, удовлетворяющую, как нетрудно проверить, всем этим условиям. (В наших обозначениях $y_0=y_{-0}=y_{15}=y_{-15}=1$.)

Теперь имеем:

$y_0-y_1=(2y_0-y_1-y_{-1})/2\leqslant\beta$, $y_{14}-y_{15}\leqslant\beta$,
$y_1-y_2\leqslant 3\beta$, $y_{13}-y_{14}\leqslant 3\beta$,
$y_2-y_3\leqslant 5\beta$, $y_{12}-y_{13}\leqslant 5\beta$,
. . . .
$y_6-y_7\leqslant 13\beta$, $y_7-y_8\leqslant 15\beta$, $y_8-y_9\leqslant 13\beta$,

Из первых семи неравенств находим

$y_k\geqslant 1-k^2\beta$ при $0\leqslant k\leqslant 7$;

из остальных

$y_k\geqslant 1-(7^2+8^2)\beta+(15-k)^2\beta$ при $7\leqslant k\leqslant 15$.

Суммируя все y_k (напомним, что $y_k=y_{-k}$), найдем $0\geqslant 30-15(7^2+8^2)\beta$, откуда $\beta\geqslant 2/113$.

В заключение — несколько задач, в том или ином отношении связанных с рассмотренными выше.

1. В последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ числа a_0 и a_n равны нулю, а модуль разности между каждым числом и средним арифметическим двух его соседей не превосходит единицы. Докажите, что $a_k\leqslant k(n-k)$.

2. Известно, что a_0, $a_1, \ldots$ — натуральные числа, $a_1>a_0$, и $a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}$ при всех $k>1$. Докажите, что $a_{100}>2^{99}$.

3. Даны числа $a_1, \ldots, a_7$. Известно, что их сумма равна нулю и что наибольшее из них по абсолютной величине $a_1=2$. Оцените максимум абсолютной величины вторых разностей.

4. Дан некоторый набор чисел $a_1, \ldots, a_n$. Известно, что

$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 2a_1$,
$0\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant 2a_2$,

и т. д. Докажите, что в сумме $S=\pm a_1\pm a_2\pm\ldots\pm a_n$ можно выбрать знаки так, чтобы выполнялось неравенство: $0\leqslant S\leqslant a_1$.

5. а) Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — две последовательности такие, что их «вторые разности» постоянны: $x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}=a$, $y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}=b$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$. Докажите, что точки $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)\ldots(x_n;y_n)$ лежат на одной прямой или на одной параболе в плоскости Oxy.

б) Докажите, что точки $(x;y)$, где $x=a_1t^2+b_1t+c_1$, $y=a_2t^2+b_2t+c$, лежат на одной прямой или на одной параболе.

6. Пусть f определена на отрезке $[0, n]$, $f(0)=f(n)=0$. Какого наибольшего значения может достигать f, если а) $|f'(x)|\leqslant M_1$, б) $|f''(x)|\leqslant M_2$? (Производные непрерывны всюду, кроме конечного числа точек; f непрерывна на $[0, n]$.)

7. Пусть функция f периодична с периодом T, имеет первую (а в задаче б) — и вторую) производную, непрерывную при всех x. Пусть $\int\limits_0^T f(x)\,dx=0$, $\max\limits_x|f(x)|=M_0$.

а) Докажите, что если $\max\limits_x|f'(x)|=M_1$, то $M_0\leqslant(M_1T)/4$.

б) Докажите, что если $\max\limits_x|f''(x)|=M_2$, то $M_0\leqslant(M_2T^2)/16$.

*) См. «Квант», 1976, № 8.

**) Здесь и ниже k пробегает значения $-14\leqslant k\leqslant 15$. Для $k=15$ мы полагаем $y_{k+1}=y_{-14}$, — ведь соседнее с y_{15} число на окружности — это y_{-14}.



Явление дифракции света изучается в 10 классе, поэтому понять до конца все теоретические рассуждения, проведенные в этой статье, смогут, наверное, лишь десятиклассники. А проделать опыт, очень простой и красивый, мы советуем всем желающим.

А. Бондарь

Грампластинка и дифракция света



Как известно, один из самых точных методов определения спектрального состава исследуемого излучения основан на явлении дифракции. Хорошим спектральным аппаратом является дифракционная решетка. Оказывается, обычную грампластинку тоже можно использовать для наблюдения дифракции и, в частности, для измерения длины волны видимого света.

Во время звукозаписи на поверхность пластинки на равных расстояниях друг от друга наносятся бороздки. Эти бороздки рассеивают свет, а промежутки между ними отражают его. Таким образом, грампластинка подобна отражательной дифракционной решетке. Если ширина отражающих полос равна a, а ширина рассеивающих бороздок — b, то величина $d = a + b$ является периодом решетки.

Пусть на отражательную решетку с периодом d падает плоская монохроматическая волна длины λ под углом θ к решетке (рис. 1). (Случай нормального падения лучей подробно рассмотрен в учебном пособии для 10 класса (см. § 110).) Согласно принципу Гюйгенса — Френеля, каждая точка отражающей поверхности решетки становится самостоятельным точечным источником, посылающим свет по всевозможным направлениям. Рассмотрим волны, распространяющиеся под углом φ к решетке (см. рис. 1). С помощью собирающей линзы (например, хрусталика глаза) эти волны можно собрать в одну точку. Найдем условие, когда при сложении волны будут усиливать друг друга.

Разность хода лучей *1* и *2*, идущих от соответствующих точек A и B двух соседних отражающих участков решетки (рис. 2), равна

$$|AK| - |NB| = d\sin\varphi - d\sin\theta = d(\sin\varphi - \sin\theta)$$

(KB — фронт отраженной волны в направлении под углом φ, AN — фронт падающей волны). Если раз-

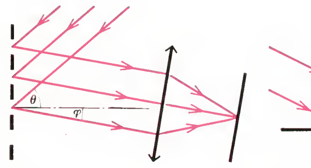


Рис. 1.

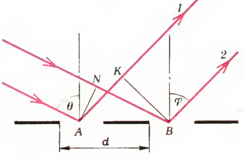


Рис. 2.

ность хода кратна длине волны, фазы колебаний, пришедших из точек A и B, будут одинаковыми, и поэтому колебания будут усиливать друг друга. Аналогично ведут себя и все остальные отражающие участки решетки. Следовательно, условие образования главных максимумов можно записать так:

$$d\,|\sin\varphi - \sin\theta| = k\lambda, \qquad (*)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда можно определить длину волны λ. Для этого надо знать период решетки d, угол θ падения волны на решетку и направление на соответствующий максимум — угол φ. Обычно период решетки много больше длины волны ($d \gg \lambda$), поэтому углы φ малы. Это означает, что главные максимумы располагаются очень близко друг к другу, и дифракционная картина получается очень нечеткой. Однако чем больше угол падения лучей на решетку (угол θ), тем больше углы φ и, следовательно, тем удобнее производить необходимые измерения. Вот почему лучше использовать не нормальное, а наклонное падение лучей на решетку.

До сих пор мы говорили о монохроматическом свете. А если на решетку падает белый свет, сложный по своему спектральному составу? Из уравнения (*) непосредственно следует, что положение каждого главного максимума зависит от длины волны. Чем меньше длина волны, тем меньшему значению угла φ соответствует максимум. Таким образом, все максимумы (кроме нулевого) растягиваются в спектр, фиолетовый конец которого обращен к центру дифракционной картины, а красный — наружу. По обе стороны от центрального (нулевого) максимума расположены два спектра первого порядка,

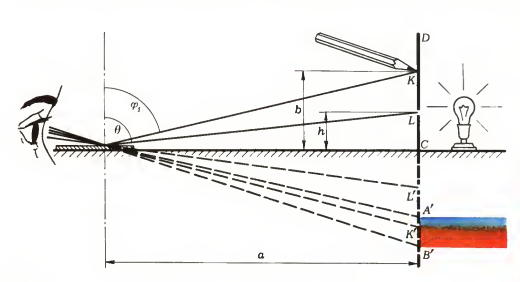


Рис. 3.

затем два спектра второго порядка и т. д. По мере увеличения порядка спектра расстояние между соответствующими линиями спектров увеличивается, так что спектры могут накладываться друг на друга. Например, для солнечного света спектры второго и третьего порядков уже частично перекрываются.

Теперь перейдем непосредственно к опыту. Чтобы измерить длину волны, соответствующую определенному цвету, надо определить период решетки (d), синус угла падения света на решетку ($\sin\theta$) и синус угла, определяющего направление на какой-нибудь максимум, например, на максимум первого порядка ($\sin\varphi_1$). Период решетки легко найти, проигрывая пластинку:

$$d = \frac{\Delta R}{n\Delta t}.$$

Здесь ΔR — абсолютная величина перемещения иглы вдоль радиуса пластинки за время Δt, n — число оборотов в единицу времени. Обычно $d \approx 0{,}01$ *см*.

В качестве источника света можно использовать обычную настольную лампу. Чтобы свет от нее не мешал наблюдению дифракционной картины, сделайте из картона экран со щелью и прикройте им лампу. При этом нить накала лампы должна быть видна через щель. Установите лампу около одной стены комнаты, пластинку положите горизонтально около противоположной стены и найдите изображение щели (рис. 3). Одновременно вы увидите размытые цветные полосы. Это и есть спектр первого порядка ($k = 1$). Легко проверить, что действительно, чем больше угол θ, тем шире получается цветное изображение щели и тем точнее можно измерить угол, под которым дифрагирует свет интересующей нас длины волны.

Для определения $\sin\varphi_1$ надо попросить товарища подержать карандаш (или какой-нибудь другой предмет) над щелью так, чтобы его изображение в отраженном от решетки (как от плоского зеркала) свете совпало с выбранным участком спектра (см. рис. 3). Измерив линейкой a, b и h, найдем $\sin\varphi_1$ и $\sin\theta$:

$$\sin\varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Эти выражения можно несколько упростить. Поскольку $b \ll a$ и $h \ll a$,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2/a^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}$$

и

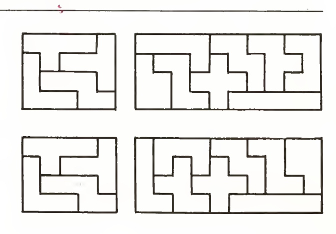
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2/a^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}.$$

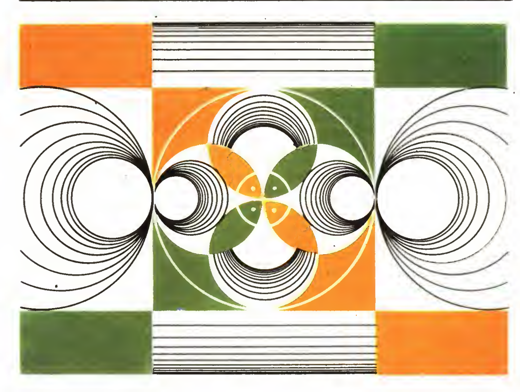
Тогда окончательно

$$\lambda = d\,|\sin\varphi_1 - \sin\theta| \approx d\,\frac{|h^2-b^2|}{2a^2}.$$

Измерив длины волн света различных цветов, интересно сравнить их с табличными значениями. В наших опытах при тщательных измерениях ошибка была порядка 10^{-8} *м*. Для длин волн видимого света ($\lambda \sim 10^{-7}$ *м*) такая точность вполне допустима.

Во втором номере журнала за этот год мы предложили нашим читателям несколько задач, связанных с пентамино. Двум читателям (Л. Муталупу из Андижанской области и Ю. Стасевичу из Ворошиловградской области) удалось решить одну из них — сложить из полного набора пентамино одновременно два прямоугольника 4×5 и 4×10. Их решения совпадают для маленького прямоугольника и различны для большого. Вот они:





Геометрия круга

В. Вавилов

«Все мои произведения — это игры. Серьезные игры».

Мориц Эшер

На этом занятии мы расскажем об одном преобразовании плоскости — инверсии, а затем, как обычно, сформулируем задание и приложим образец для его выполнения.

1.

Определение. *Инверсией I относительно окружности γ называется преобразование плоскости, которое каждой точке M плоскости, отличной от центра O окружности, ставит в соответствие точку M на луче OM такую, что*

$$|OM'|\cdot|OM|=r^2;$$

здесь r — радиус окружности γ.

Окружность γ называется *окружностью инверсии*, а точка O — *центром инверсии*.

Если M лежит на окружности инверсии ($M\in\gamma$), то есть, если $|OM|=r$, то тогда $|OM'|=r^2/|OM|=r$ и $M'\in\gamma$. Но точки M и M' лежат на одном луче; следовательно, они совпадают. Значит, все точки окружности γ являются неподвижными точками преобразования I: $I(M)=M$, $M\in\gamma$.

Заметим, что для центра O нет соответствующей точки. Дело в том, что величина $|OM'|=r^2/|OM|$ стремится к бесконечности, когда $|OM|$ стремится к нулю, то есть когда $M\to O$. Для того, чтобы иметь взаимно однозначное соответствие для всех без исключения точек плоскости, мы дополним плоскость одной новой точкой O_∞ («бесконечно удаленной») и будем считать, что точке O при инверсии I соответствует точка O_∞, а точке O_∞ — точка O.

Кроме того, будем считать, что все прямые содержат O_∞.

Пусть $M_1=I(M)$, $M_2=I(M_1)$. Все три точки M, M_1 и M_2 лежат на

одном луче и

$$|OM_1| \cdot |OM| = r^2,$$
$$|OM_1| \cdot |OM_2| = r^2.$$

Отсюда получаем, что

$$|OM_2| = |OM|.$$

Таким образом, если M — произвольная точка плоскости, то дважды выполненная инверсия I переводит точку M снова в эту же точку. Следовательно, «квадрат» инверсии является тождественным преобразованием плоскости.

Подобным же свойством обладает симметрия относительно прямой; поэтому иногда инверсию называют *«симметрией относительно окружности»*.

Возьмем точку M, лежащую внутри круга с границей γ и отличную от O, и построим точку $I(M) = M'$. Пусть N — один из концов хорды окружности инверсии γ, проходящей через точку M перпендикулярно $[OM)$ (см. рис. 1). Тогда искомая точка M' — это точка пересечения луча OM и касательной к окружности γ в точке N. В самом деле, так как прямоугольные треугольники ONM и ONM' подобны и $|ON| = r$, то $|OM|/r = r/|OM'|$, то есть $|OM'| \cdot |OM| = r^2$. Когда же нужно построить точку $I(M)$ для точки M, лежащей вне круга с границей γ, то из этого же рисунка видно, что если N — одна из точек пересечения окружности γ с окружностью, построенной на $[OM]$ как на диаметре, то искомая точка M' — основание перпендикуляра, опущенного из точки N на $[OM]$.

Вот еще один прием геометрического построения точки $I(M)$ — при помощи одного только циркуля. Рассмотрим случай, когда точка M лежит вне круга с границей γ. Радиусом $|OM|$ опишем дугу с центром M, пересекающую γ в точках L и N (рис. 2). Затем из этих точек как из центров опишем дуги радиусом r (равным радиусу окружности γ); эти дуги пересекаются с прямой OM в двух точках — точке O и в некоторой точке M'. В равнобедренных треугольниках OLM' и OLM углы при основаниях конгруэнтны:

$$\widehat{OLM} = \widehat{MOL} = \widehat{OM'L},$$

так что эти треугольники подобны. Поэтому $|OM|/|OL| = |OL|/|OM'|$, то есть

$$|OM| \cdot |OM'| = r^2,$$

и мы получаем, что M' — искомая точка.

Для точки M, лежащей внутри круга с границей γ, построение точки $I(M)$ остается прежним, если окружность радиуса $|OM|$ с центром M пересекается с окружностью γ в двух точках. Если же пересечений нет, то необходимы дополнительные построения. Сделайте эти построения.

Преобразование симметрии относительно прямой переводит прямые в прямые и углы в конгруэнтные им углы. Преобразование инверсии переводит углы также в конгруэнтные углы, но некоторые прямые преобразует в окружности. Более точно, *инверсия I с центром O переводит*:

1°. *Прямую, проходящую через точку O, саму в себя.*

2°. *Прямую, не проходящую через точку O, в окружность, проходящую через точку O* (рис. 3).

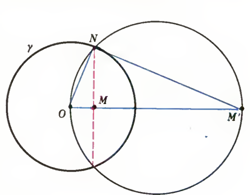


Рис. 1.

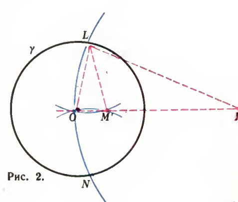


Рис. 2.

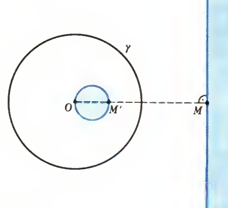


Рис. 3.

3°. *Окружность, проходящую через точку O, в прямую, не проходящую через точку O* (рис. 3).

4°. *Окружность, не проходящую через точку O, в окружность, также не проходящую через точку O* (рис. 4).

Доказательство этих свойств мы не приводим. Докажите их самостоятельно или прочитайте в статье А. П. Савина «Инверсия и оружность Аполлония» («Квант», 1971, № 8).

Из свойств 1°—4 видно, что окружности и прямые равноправны. Если условиться считать прямую линию окружностью «бесконечно большого радиуса», то перечисленные свойства означают, что *при инверсии окружность всегда переходит в окружность*. Инверсия же относительно окружности «бесконечно большого радиуса» (то есть относительно прямой линии) совпадает с обычной симметрией относительно прямой (почему?).

Определение. *Величиной угла между двумя пересекающимися окружностями (в том числе и прямыми линиями) называется величина наименьшего угла, который образуют касательные в точке их пересечения.*

Две окружности называются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом.

Отметим еще два свойства инверсии:

5°. *Инверсия переводит окружность, ортогональную к окружности инверсии γ, саму в себя.*

6°. *Инверсия не изменяет величины углов между пересекающимися окружностями.*

Свойство 5° означает, что окружность, ортогональная к окружности инверсии γ, неподвижна (но не точечно неподвижна: γ делит эту окружность на две части, которые при инверсии переходят одна в другую — см. рисунок 5).

Задача 1. Постройте образ изображенного на рисунке 6 слова при инверсии относительно окружности γ. Результат сравните с рисунком на с. 66.

Задача 2. Докажите, что точка $M=(x; y)$ при инверсии относительно окружности с центром в начале кооординат и радиусом r переходит в точку $M'=(x'; y')$, координаты которой определяются по формулам

$$x' = \frac{xr}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{yr}{x^2+y^2}.$$

Решите эти уравнения относительно x и y.

Задача 3. Основываясь на задаче 2, докажите свойства 1°—4° аналитически.

Задача 4. Во что перейдут два семейства прямых x=const и y=const, параллельных координатным осям, при инверсии относительно единичной окружности с центром в начале? Дайте ответ сначала без формул задачи 2, а затем — с помощью этих формул.

2.

Многие из вас слышали (или читали) о *геометрии Лобачевского*, отличающейся от обычной (*евклидовой*) геометрии на плоскости тем, что в ней не выполняется аксиома о парал-

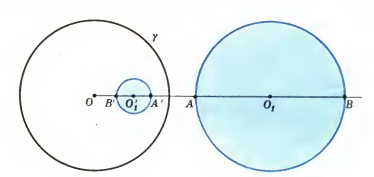


Рис. 4.

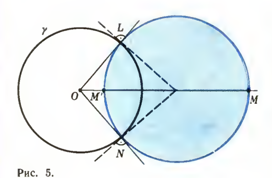


Рис. 5.



Рис. 6.

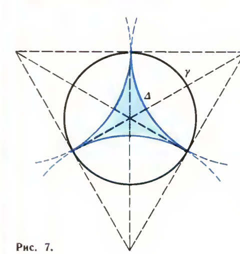


Рис. 7.

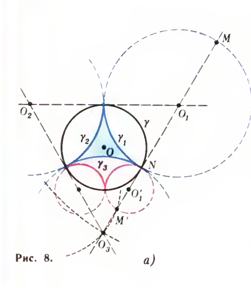


Рис. 8.

лельных линиях. Прекрасную модель для геометрии Лобачевского предложил французский математик Анри Пуанкаре. В этой модели «точками» являются только точки, лежащие внутри некоторого круга с границей γ (точки окружности γ не рассматрнваются), а «прямые» определяются как ортогональные к γ дуги окружностей (или части прямых), также расположенные внутри рассматриваемого круга *).

Задача 5. Нарисуйте несколько «прямых» в модели Пуанкаре и проверьте аксиому о параллельных.

В геометрии Лобачевского, в отличие от евклидовой геометрии, существует «бесконечный» треугольник с нулевыми углами — он изображен на рисунке 7. Обозначим этот треугольник через Δ.

Теперь почти все готово для того, чтобы сформулировать задание нашего практикума.

Построим три новых треугольника, получающнхся из треугольника Δ при симметрии относнтельно его сторон γ_1, γ_2, γ_3 (они являются образами треугольника Δ после трех соответствующих преобразованнй инверсни). Треугольник, симметричный с треугольннком Δ относнтельно любой его стороны, будет по-прежнему иметь нулевые углы, н его вершнны будут лежать на окружностн γ (рис. 8). Действительно, преобразование нниерсии величин углов не нзменяет; а окружность γ прн данных инверснях перейдет в себя, поскольку она ортогональна сторонам γ_1, γ_2, γ_3 треугольника Δ. На рнсунке 8 показан способ построения: при помощи циркуля находим точку M', симметрнчную точке M относительно стороны γ_3 (точка M принадлежит окружности с центром O_1, дуга γ_1 которой является стороной треугольнника Δ). Тогда центр (точка O_1') искомой окружностн является серединой отрезка $M'N$ (N — неподвнжная точка пересечения окружности γ со стороной γ_1).

---

*) Подробно о геометрии Лобачевского и ее моделях можно прочитать в «Кванте», № 2 и № 3 за 1976 год.

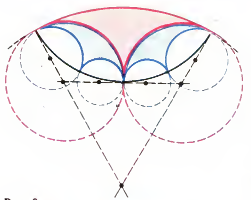




Рис. 9.

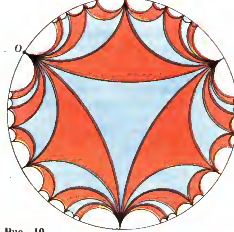


Рис. 10.

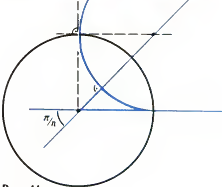


Рис. 11.

Затем каждый из трех вновь полученных треугольников симметрично отобразим относительно тех двух его сторон, которые не являются сторонами треугольника Δ (рис. 9); получим шесть треугольников «второго поколения».

Сделав четыре шага аналогичных построений, мы получим часть *модулярной фигуры*, показанную на рисунке 10.

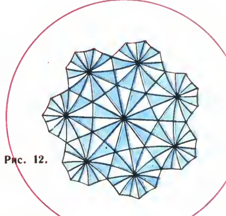


Рис. 12.

Задание

Постройте часть модулярной фигуры, порождаемую прямоугольным круговым треугольником с вершиной в начале координат и углом $\frac{\pi}{n}$ *при этой вершине;* $n \geqslant 3$ *— целое число* (рис. 11).

За образец для выполнения работы можно принять рисунки 10 и 12; фигура на рисунке 12 соответствует случаю $n = 7$.

Задача 6. Произведите инверсию фигуры, изображенной на рисунке 10, приняв за центр инверсии отмеченную на рисунке точку O (радиус окружности инверсии несуществен — почему?). Сравните результат с обложкой 3-го номера журнала «Квант» за прошлый год.

В заключение мы предлагаем вам несколько задач исследовательского характера.

Задача 7. При каких величинах углов исходного треугольника (уже не обязательно прямоугольного) можно симметриями относительно его сторон «замостить» без наложений весь исходный круг с границей γ?

Задача 8. Какие круговые многоугольные области годятся для того, чтобы получилось указанное в задаче 7 замощение?

Об инверсии и ее применениях можно прочитать в следующих книгах:

1. Д. Гильберт и Кон-Фоссен, *Наглядная геометрия*, М.—Л., Гостехиздат, 1976.

2. Г. С. М. Коксетер, *Введение в геометрию*, М., «Наука», 1966.

3. М. Гарднер, *Математические новеллы*, М., «Мир», 1974.

Овалы Декарта

Термин «овал» происходит от латинского «ovum» (яйцо). Овалами (в широком смысле слова) называют плоские кривые яйцеобразной формы.

Овалы Декарта — это множества точек на плоскости, расстояния r_1, r_2 каждой из которых от двух фиксированных точек F_1, F_2 той же плоскости удовлетворяют одному из уравнений

$$mr_1+nr_2=a, \qquad (1)$$
$$mr_1-nr_2=a \qquad (2)$$

(m, n, a — фиксированные положительные константы). Обычно пару овалов Декарта, удовлетворяющих уравнениям (1), (2) (разумеется, при одних и тех же параметрах m, n, a), рассматривают совместно (на рисунке 1 M_1— точка графика уравнения (1), M_2— графика уравнения (2)). При $n=0$ уравнения (1), (2) задают окружность. Эта окружность изображена штриховой линией на второй странице обложки.

Точки F_1, F_2 называют *фокусами*. Как показал Шаль (1793—1880), помимо фокусов F_1, F_2 овалы Декарта имеют еще и т р е т и й фокус F_3, равноправный относительно основного свойства овалов с каждым из фокусов F_1, F_2, т. е. для некоторых констант m', n', a' и m'', n'', a графиком уравнений

$$m\,|MF_1|\pm n\,|MF_2|=a,$$
$$m'\,|MF_1|\pm n'\,|MF_3|=a',$$
$$m''\,|MF_2|\pm n''\,|MF_3|=a''$$

является одно и то же множество точек. Фокус F_3 помещается в пересечении прямой F_1F_2 с окружностью, проходящей через точки F_2, M_1 и M_2 (рис. 2). Доказательство и исследование этого интересного факта предоставляется читателю (в этом вам может помочь подобие треугольников).

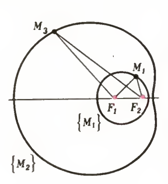


Рис. 1.

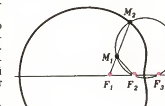


Рис. 2.

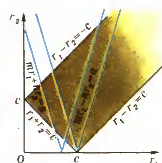


Рис. 3.

Вот еще одна задача, полегче. И. Ньютон показал, что множество точек, отношение расстояний каждой из которых от двух заданных окружностей есть величина постоянная, является одной из кривых, составляющих пару овалов Декарта. Какой именно?

Овалы Декарта представляют из себя две замкнутые линии, одна из которых объемлет другую (вторая страница обложки).

Какие значения могут принимать r_1, r_2 для точек овалов Декарта? Из $\triangle F_1MF_2$ (с учетом того, что точка M может лежать на прямой F_1F_2) $r_1+r_2\geqslant c$ и $|r_1-r_2|\leqslant c$. Решением системы этих неравенств является полуполоса, изображенная на рисунке 3. Для овалов Декарта, заданных уравнениями (1), (2) при фиксированных m, n и a, допустимые пары $\langle r_1, r_2\rangle$ получаются на рисунке 3 при пересечении построенной полуполосы с прямыми $mr_1+nr_2=a$ и $mr_1-nr_2=a$. Из рисунка видно, что овалы Декарта пересекаются только в том случае, когда точка $\langle \frac{a}{m}, 0\rangle$ пересечения этих прямых совпадает с точкой $\langle c, 0\rangle$, т. е. при $c=\frac{a}{m}$. Этому соотношению параметров соответствует *улитка Паскаля*.

Рассмотрим снова точки M_1 и M_2, лежащие на одной прямой с F_1 (рис. 2). При помощи теоремы косинусов и уравнений (1), (2) легко получить квадратное уравнение вида

$$r_1^2+pr_1+\frac{a^2-n^2c^2}{m^2-n^2}=0,$$

корнями которого являются $|M_1F_1|$ и $|M_2F_1|$. Следовательно, произведение этих расстояний постоянно для данного овала. Поэтому кривые $\{M_1\}$ и $\{M_2\}$ получаются друг из друга инверсией относительно некоторой окружности с центром в F_1.

Декарт построил свои овалы в связи с исследованиями по оптике. При усовершенствовании оптических инструментов, употребляемых в навигации, возникла задача об определении такой кривой, которая преломляла бы лучи, выходящие из заданной точки F_1, так, чтобы преломленные лучи проходили через другую заданную точку F_2. Овалы Декарта как раз и обладают нужным свойством.

В. Березин

задачник Кванта

Задачи

М446 — М450; Ф458 — Ф462

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 15 сентября 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М446, М447» или «...Ф458». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М446. Окружность радиуса 1 катится снаружи по окружности радиуса $\sqrt{2}$. В начальный момент времени точка касания окружностей отмечена липкой красной краской. При качении покрашенные точки той и другой окружности вновь красят точки, с которыми они соприкасаются (рис. 1). Сколько различных точек неподвижной окружности будет запачкано к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 100 оборотов вокруг неподвижной?

Д. Бернштейн

М447*. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и CO (где O — центр описанной окружности) продолжены до пересечения в точках D и E со сторонами AC и BC треугольника. Оказалось, что $\widehat{BDE}=50^\circ$, а $\widehat{CED}=30^\circ$. Найдите величины углов треугольника ABC и докажите равенства $|AE|=|ED|$, $|CE|=|CB|$, $|CD|=|CO|$.

Я. Суконник

М448*. Докажите, что центры всех эллипсов, вписанных в данный четырехугольник, лежат на прямой, проходящей через середины диагоналей этого четырехугольника.

Исаак Ньютон

М449. а) По одной прямой двигаются n одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений между ними может произойти?

б)* Тот же вопрос для трех шариков масс m_1, m_2 и m_3.

в) * Попробуйте доказать, что если по одной прямой двигаются n различных шариков, то общее число столкновений между ними конечно.

(В этих задачах шарики рассматриваются как материальные точки, сталкивающиеся друг с другом абсолютно упруго, т. е. с сохранением суммарных импульса и энергии, причем предполагается, что все происходящие столкновения — только парные: по три и более шариков в одной точке одновременно не оказываются.)

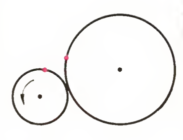


Рис. 1.

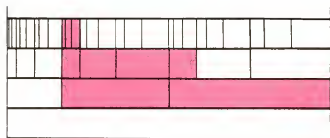


Рис. 2.

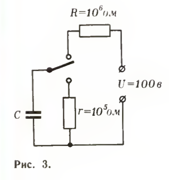


Рис. 3.

Задача М449 — ее можно было бы отнести также и к физическим задачам — потребует, возможно, длительных размышлений, и срок присылки ее решений — 15 ноября.

А. Земляков, Я. Синай

М450. Система прямоугольников из n этажей (рис. 2) построена следующим образом. Начиная с нижнего прямоугольника, образующего первый этаж, верхняя сторона каждого прямоугольника делится в отношении 1 : 2 : 3; на трех полученных отрезках как на основаниях строятся прямоугольники той же высоты, что и первоначальный, и так — до самого верхнего этажа. Из полученного множества прямоугольников выбрано некоторое подмножество, состоящее из попарно неконгруэнтных прямоугольников (одно такое подмножество на рисунке — красное). Докажите, что найдется вертикальная прямая, пересекающая не более двух из выбранных прямоугольников.

А. Клепцын

Ф458. Мальчик плывет со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. В каком направлении он должен плыть к другому берегу, чтобы его снесло течением как можно меньше?

О. Савченко

Ф459. Электроплитка содержит три спирали с сопротивлением $R=120$ *ом* каждая, соединенные параллельно друг с другом. Плитка включается в сеть последовательно с резистором $r=50$ *ом*. Как изменится время, необходимое для нагревания на этой плитке чайника с водой до кипения, при перегорании одной из спиралей?

И. Слободецкий

Ф460. В схеме, изображенной на рисунке 3, переключатель все время переключается из верхнего положения в нижнее и обратно. В верхнем положении он задерживается на время $\tau_1=2\cdot10^{-3}$ *сек*, в нижнем — на время $\tau_2=10^{-3}$ *сек*. Найти мощность, потребляемую от источника через очень большой промежуток времени после начала работы переключателя.

Емкость конденсатора такова, что за время τ_2 он не успевает разрядиться сколь-нибудь существенно.

А. Зильберман

Ф461. Каждый квадратный метр поверхности тела, нагретого до температуры T, излучает за единицу времени энергию $E=5{,}67\cdot10^{-8}\cdot T^4$ *вт*. На каком расстоянии от Солнца железные пылинки превратятся в капли, если плотность потока солнечного излучения (энергия, проходящая за единицу времени через единицу площади) на орбите Земли $W = 1400$ *вт/м*²? Температуру плавления железа принять равной 1535 °К, расстояние от Земли до Солнца $150\cdot10^9$ *м*.

А. Стасенко

Ф462. Если терморегулятор электрического утюга поставлен в положение «капрон», то утюг периодически включается на 10 *сек* и выключается на 40 *сек*. Поверхность утюга при этом нагревается до температуры 100°С. Если терморегулятор поставить в положение «хлопок», то утюг периодически включается на 20 *сек* и выключается на 30 *сек*. Определить установившуюся температуру поверхности утюга в этом положении терморегулятора. Найти, до какой температуры нагреется включенный утюг, если терморегулятор выйдет из строя.

Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Температура в комнате 20 °С.

В. Скороваров

Решения задач

М403, М405 — М409; Ф413 — Ф415, Ф417 — Ф422

М403. *Докажите, что если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит четное число ребер, то в любом сечении его плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин, получится многоугольник с четным числом сторон.*

Нетрудно убедиться, что наш многогранник можно раскрасить в два цвета — скажем белый и красный — так, чтобы любые две соседние (граничащие по ребру) грани имели разные цвета. В самом деле, расположим многогранник так, чтобы все его вершины находились на разной высоте (т. е. чтобы никакое ребро и никакая диагональ не были параллельны горизонтали — см. рис. 1. Проведем через самую верхнюю вершину горизонтальную плоскость. Постепенно опуская эту плоскость, мы раскрасим многогранник требуемым образом: поскольку в каждой вершине сходится четное число граней, около верхней вершины мы можем выбрать цвет граней

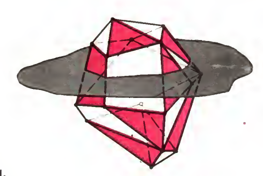


Рис. 1.

одним из двух возможных способов, а при прохождении каждой следующей вершины раскраска прилежащих к ней граней однозначно определяется.

После того как многогранник раскрашен в два цвета, утверждение задачи становится очевидным: в каждом сечении, не проходящем через вершину, «белые» и «красные» стороны чередуются.

Н. Васильев

◆

М405. *) *На шахматной доске размером 99×99 отмечена фигура Ф (эта фигура будет разной в пунктах а), б) и в)). В каждой клетке фигуры Ф сидит жук. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры Ф; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)*

а) Пусть фигура Ф — это «центральный крест» (см. рис. 2). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетел в соседнюю клетку.

б) Верно ли это утверждение, если фигура Ф — это «оконная рама» (см. рис. 3)?

в) Верно ли это утверждение, если фигура Ф — это вся доска?

а) Посмотрим, на какую из сторон креста перелетел жук из центральной клетки O. Если он остался на месте, то задача решена. Пусть, например, он перелетел вправо, на сторону OA (остальные случаи разбираются так же). Выберем среди жуков, которые сидели на стороне OA и перелетели вправо, жука X — самого далекого от клетки O. Если он отлетел на одну клетку, то задача решена. Если же он отлетел больше чем на одну клетку, то его правый сосед не может перелететь влево (иначе они перестанут быть соседями). Перелететь вправо он также не может, так как X — самый правый жук, перелетевший вправо. Следовательно, правый сосед жука X остался на месте.

б) В этом случае утверждение неверно. Чтобы показать это, организуем полет в два этапа. На первом этапе соберем всех жуков на границе правого верхнего квадратика K (см. рис. 2); каждый жук перелетает в ближайшую к нему клетку этого квадратика. При этом соседние жуки не разлетаются и все жуки, сидевшие на границе квадратика K, остаются на месте. На втором этапе заставим каждого жука перелететь в противоположную клетку квадратика K (симметричную относительно его центра). Ясно, что при этом соседние жуки также не разлетятся. Докажем, что в результате этих двух перелетов никакой жук не останется на месте и не перелетит в соседнюю клетку. Пусть на первом этапе некоторый жук из клетки A перелетел к клетку B, а на втором этапе — в клетку C. Так как C лежит на границе K, то жук из клетки C после первого этапа останется на месте. Если бы A и C оказались соседними клетками, то жуки, сидевшие в них, перелетели бы после первого этапа в соседние клетки B и C. Но B и C — противоположные клетки границы квадратика K, и соседями быть не могут. Следовательно, A и C также не являются соседями.

в) В этом случае утверждение верно. При доказательстве будем пользоваться «шахматным» расстоянием между клетками доски: *расстоянием между клетками A и B назовем наименьшее число ходов, которое потребуется шахматному королю, чтобы пройти из A в B.* Из условия задачи вытекает, что расстояния между жуками после перелета не увеличиваются.

Прямоугольник, составленный из клеток доски, будем называть *инвариантным*, если любой жук из этого прямоугольника перелетает в клетку этого же прямоугольника. Например, вся доска является инвариантным прямоугольни-

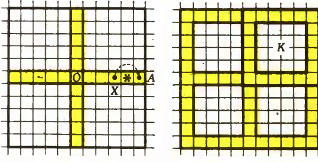


Рис. 2. Рис. 3.

*) Задача М404 решена в статье А. Савина «От школьной задачи — к проблеме», «Квант», 1976, № 12

ком. Рассмотрим инвариантный прямоугольник с наименьшим числом клеток и докажем, что его размеры, как вертикальный, так и горизонтальный, не превышают двух. Тогда ясно, что любой жук из этого прямоугольника либо остается на месте, либо перелетит в соседнюю клетку.

Предположим противное: наименьший инвариантный прямоугольник $П$ имеет размеры $a\times b$, где $a\geqslant b$ и $a>2$. Докажем, что в этом случае внутри него можно выбрать еще меньший инвариантный прямоугольник.

Разберем сначала случай $a>b$. Назовем *границей* прямоугольника две крайние полоски длины b, а оставшуюся часть назовем *внутренностью* (см. рис. 4). Заметим, что расстояние от любой внутренней клетки до любой другой клетки прямоугольника $П$ меньше, чем a. Если жуки из всех внутренних клеток перелетели во внутренние клетки, то прямоугольник, составленный из внутренних клеток, будет инвариантым, что и требовалось. Пусть теперь жук из некоторой внутренней клетки A перелетел в граничную клетку B. Рассмотрим прямоугольник M, составленный из тех клеток прямоугольника $П$, расстояние от которых до клетки B меньше, чем a. Поскольку все жуки прямоугольника $П$ находились на расстоянии меньшем чем a от клетки A, то все они перелетели в прямоугольник M. Поэтому прямоугольник M является инвариантым прямоугольником. Так как он содержит меньше клеток, чем $П$, то и в этом случае все доказано.

Осталось разобрать случай $a=b>2$. В этом случае границей назовем край этого квадрата, а внутренностью все остальные клетки квадрата (рис. 5). Дальше проходят те же рассуждения, что и выше.

Д. Бернштейн

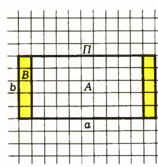


Рис. 4.

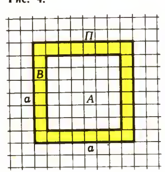


Рис. 5.

M406. *Окружность радиуса R разделена точками A_1, A_2, A_3, A_4 на четыре равные дуги. Докажите, что сумма четвертых степеней расстояний от произвольной точки окружности M до точек A_k не зависит от положения точки M, причем $|A_1M|^4+|A_2M|^4+|A_3M|^4+|A_4M|^4=24R^4$.*

◆

Обозначим через φ угол между радиусами OA_1 и OM (рис. 6). Тогда по теореме косинусов находим

$$|A_1M|^2=2R^2-2R^2\cos\varphi,$$

$$|A_2M|^2=2R^2-2R^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$|A_3M|^2=2R^2-2R^2\cos(\pi-\varphi),$$

$$|A_4M|^2=2R^2-2R^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right).$$

Возводя обе части каждого равенства в квадрат и складывая новые равенства, получаем:

$$|A_1M|^4+|A_2M|^4+|A_3M|^4+|A_4M|^4=4R^4\,[(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)+(1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi)+(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)+(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)]=24R^4,$$

что и требовалось.

Аналогично можно доказать, что если окружность радиуса R разделена на шесть равных дуг, то сумма шестых степеней расстояний от произвольной точки окружности до точек деления не зависит от положения этой точки и равна $120\,R^6$.

Ю. Бабенко

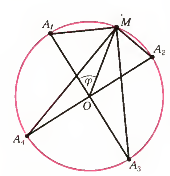


Рис. 6.

M407. *Даны два натуральных числа n и m, $n>m$. Докажите, что n можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — делитель числа m, а другое не имеет с n ни одного общего делителя, кроме единицы.*

◆

Пусть d — наибольший общий делитель чисел n и m, а m_1 — наибольший общий делитель d и m. Представим число m в виде произведения $m=m_1m_2$, где m_2 уже взаимно просто с d. Но $d=$ Н. О. Д. (m, n), а потому m_2 взаимно просто и с n. Записав теперь n в виде $n=(n-m_2)+m_2$, получим нужное представление: m_2 — делитель m, а $n-m_2$ уже не имеет с m ни одного общего делителя, кроме единицы.

С. Конягин

М408. *Из 30 конгруэнтных прямоугольников составлен прямоугольник, подобный исходным. Каким может быть отношение длин сторон этого прямоугольника?*

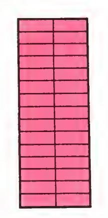


Рис. 7

Примем длину меньшей стороны исходного (маленького) прямоугольника за единицу, а длину его большей стороны обозначим через a ($a>1$). Пусть A — длина большей стороны «составного» прямоугольника, а B — длина его меньшей стороны. Поскольку большой прямоугольник составлен из маленьких, длины сторон которых равны 1 и a, найдутся такие натуральные числа x, y, z и t, что $A = x + ay$, $B = z + at$. При этом площадь большого прямоугольника в 30 раз больше площади маленького. Значит, большой прямоугольник $A \times B$ подобен маленькому $a \times 1$ с коэффициентом $\sqrt{30}$. Поэтому

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{30}a, \\ z + at = \sqrt{30}. \end{cases}$$

Отсюда

$$a = \frac{x}{\sqrt{30} - y} = \frac{\sqrt{30} - z}{t},$$

$$yz + 30 - xt = (y + z)\sqrt{30}. \qquad (*)$$

Поскольку $\sqrt{30}$ — число иррациональное, последнее равенство возможно только, если $y = -z$. В свою очередь равенство $y = -z$ возможно только при $y = z = 0$ (ведь y и z — также натуральные числа!). Таким образом, $A = x \cdot 1$, $B = t \cdot a$.

Это означает, что из тридцати маленьких прямоугольников можно сложить подобный им большой, располагая эти прямоугольники только так, как показано на рисунке 7: исходные прямоугольники лежат как бы поперек большого — из меньших сторон составляется бо́льшая.

Подставляя $y = z = 0$ в соотношение (*), получаем $xt = 30$, так что x и t — какие-то делители числа 30. И, наконец, искомое отношение $a = \frac{\sqrt{30}}{t}$, где t — некоторый делитель 30: $t = 1, 2, 3, 5$.

П. Панков

◆

М409. *В строчку подряд написана* 1000 *чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом A первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз A встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом B второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз B встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой пятая и так далее.*

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Более того, докажите, что 11-я строчка совпадает с 12-й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й.

а) Очевидно, что, начиная со второй строчки, все числа в таблице не больше 1000. Кроме того, каждое число не больше написанного под ним. Поэтому сумма чисел в третьей строке не меньше, чем во второй, и т. д.; и каждая из этих сумм не больше миллиона. Следовательно, поскольку все время суммы возрастать не могут, в каких-то соседних строчках суммы совпадут, а тогда совпадут и сами строчки.

б) Докажем, что если в m-й строчке, при $m \geqslant 2$, число отлично от написанного над ним, то оно не меньше чем 2^{m-2}. Действительно, для $m=2$ это очевидно, так как все числа второй строчки натуральные. Пусть это уже проверено для всех строк с номерами, меньшими m. Пусть в $m-1$-й строчке написано число a, а под ним написано число b, большее a. Тогда в $m-1$-й строчке написано b чисел, равных a. Ясно, что в $m-2$-й строчке будет несколько групп одинаковых чисел, по a чисел в каждой группе, причем числа из разных групп различны. Отсюда вытекает, что b делится на a, то есть $b \geqslant 2a$. Кроме того, по крайней мере одно из чисел в этих группах отличается от a, а значит, по предположению индукции $a \geqslant 2^{(m-1)-2}$. Итак, $b \geqslant 2a \geqslant 2^{m-2}$. Наше утверждение доказано по индукции для всех $m \geqslant 2$. Если предположить, что 11-я строчка отлична от 12-й, то какое-то число в 12-й строчке будет больше чем $2^{12-2} = 1024 > 1000$, что невозможно.

в) Предыдущие рассуждения подсказывают пример:

0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4,, …, 256, …, 256, 488, …, 488;
1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4,, …, 256, …, 256, 488, …, 488;
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488;
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488;
. . . .
256, ……………………, 256, 488, …, 488;
512, ……………………, 512, 488, …, 488

ч	1,	6,	12,	24;
у	1,	6,	12,	24;
д	3,	12,	12,	24;
е	3,	12,	12,	24;
и	2,	6,	12;	24;
Д	3,	12,	12,	24;
и	2,	6,	12,	24;
е	3,	12,	12,	24;
п	3,	12,	12,	24;
р	2,	6,	12,	24;
п	3,	12,	12,	24;
р	2,	6,	12,	24;
и	2,	6,	12,	24;
т	1,	6,	12,	24;
и	2,	6,	12,	24;
х	1,	6,	12,	24;
о	3,	12,	12,	24;
й	1,	6,	12,	24;
п	3,	12,	12,	24;
о	3,	12,	12,	24;
г	1,	6,	12,	24;
о	3,	12,	12,	24;
д	3,	12,	12,	24;
е	3,	12,	12,	24;

Рис. 8.

(в первой строчке 0 и 1 встречаются по одному разу, 2 — два раза, 4 — четыре раза, 8 — восемь раз, ..., 256—256 раз, 488 встречается 488 раз; в 11-й строчке встречается 512 раз число 512 и 488 раз число 488).

С нашей задачей связано интересное наблюдение. Возьмем какой-нибудь осмысленный текст, записанный буквами русского (можно и любого другого) алфавита. Рядом с каждой буквой напишем, сколько раз она повторяется в этом тексте, а дальше будем составлять таблицу так, как мы это делали раньше. В примере, приведенном на рисунке 8, пятый столбец уже совпадает с предыдущим: последним оказался четвертый числовой столбец. Оказывается, для различных по содержанию и по длине осмысленных текстов количество неповторяющихся числовых столбцов не бывает меньше двух и больше четырех — примеры с одним или пятью или большим числом столбцов неизвестны. Примеры текстов с четырьмя неповторяющимися столбцами (наш пример) очень редки. Разумеется, можно найти такой набор повторяющихся букв, чтобы последним числовым столбцом в таблице оказался, скажем, десятый. Из этого набора букв можно даже составить слова, использовав все буквы; но составить осмысленный текст пока не удавалось. Почему это так, мы не знаем. Пока это только любопытное наблюдение. Попробуйте найти или составить такой осмысленный текст, чтобы в соответствующей таблице последним числовым столбцом оказался первый или пятый. Наверное, первая задача легче: ведь требование очень просто — различные буквы должны встречаться в тексте различное число раз.

М. Серов

◆

Ф413. *Имеется идеальный запирающий слой с p—n-переходом. Толщина этого слоя d, диэлектрическая проницаемость ε. Нарисуйте график напряженности и потенциала электрического поля в слое, полагая распределение плотности заряда в слое таким, как показано на рисунке* **9**.

Рис. 9.

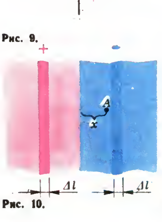


Рис. 10.

Рассмотрим точку A, находящуюся на расстоянии x от середины запирающего слоя (рис. 10), и найдем напряженность электрического поля в этой точке. Разобьем весь слой на очень тонкие участки толщиной Δl и возьмем два таких участка, расположенных симметрично относительно середины слоя. Выбранные участки образуют плоский конденсатор с плотностью заряда $\Delta\sigma = \rho_0\Delta l$. Напряженность электрического поля, созданного этим конденсатором, между его обкладками равна

$$|\Delta\vec{E}| = \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho_0\Delta l}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

а вне конденсатора равна нулю.

Согласно принципу суперпозиции, напряженность поля $\vec{E}$ в точке A равна сумме напряженностей таких конденсаторов. При этом в создании электрического поля участвуют только те конденсаторы, обкладки которых находятся на расстоянии, большем $|x|$, от середины слоя:

$$|\vec{E}| = \sum\frac{\rho_0\Delta l}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum\Delta l = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{d}{2} - x\right).$$

Аналогично для точек с координатами $0 \geqslant x \geqslant -d/2$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{d}{2} + x\right).$$

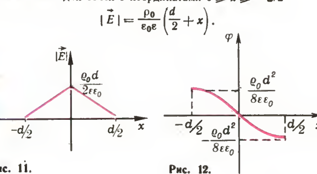


Рис. 11. **Рис. 12.**

График напряженности электрического поля в запирающем слое приведен на рисунке 11.

Теперь найдем, как меняется потенциал поля. Выберем за нуль потенциал точек с координатой $x = 0$, то есть середину слоя. Тогда потенциал точки A равен работе электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из этой точки к середине слоя. Сила, действующая на заряд при таком перемещении, направлена противоположно перемещению, поэтому работа, а значит, и потенциал поля в точке A отрицательны. Абсолютную величину потенциала φ_A проще всего найти графически:

$$|\varphi_A| = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0\varepsilon}x^2 - \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0\varepsilon}x.$$

(Выражение для потенциала точек с координатой $0 \geqslant x \geqslant -d/2$ получите самостоятельно.) График изменения потенциала показан на рисунке 12.

◆

Ф414. *Коэффициент жесткости резинового жгута длины l и массы m равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определить радиус R вращающегося кольца.*

Обозначим через L длину вращающегося кольца ($L=2\pi R$). Рассмотрим небольшой участок кольца длиной ΔL. Его масса

$$\Delta m = \frac{m}{L}\Delta L.$$

На выделенный участок на его концах действуют две силы натяжения $\vec{T}$, направленные по касательным к кольцу (рис. 13). Их равнодействующая $\vec{F}$ направлена по радиусу к центру кольца и сообщает рассматриваемому участку центростремительное ускорение $|\vec{a}| = \omega^2 R$. Из рисунка 13

$$|\vec{F}| = 2|\vec{T}|\sin\alpha/2.$$

Запишем уравнение движения выделенного участка:

$$|\vec{F}| = |\vec{a}|\,\Delta m,$$

или

$$2|\vec{T}|\sin\frac{\alpha}{2} = \omega^2 R\frac{m\Delta L}{L}.$$

Поскольку

$$|\vec{T}| = k(L - l),$$
$$L = 2\pi R$$

и при малых углах

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta L}{2R},$$

получаем

$$k(2\pi R - l)\frac{\Delta L}{R} = \frac{\omega^2 m}{2\pi}\Delta L.$$

Отсюда

$$R = \frac{l}{2\pi}\frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2 m}{4\pi^2 k}}.$$

И. Слободецкий

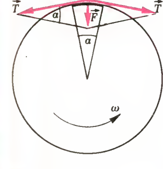


Рис. 13.

◆

Ф415. *Упрощенно атом гелия можно представлять как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра — неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приближенно диэлектрическую проницаемость жидкого*

Эта задача, несомненно, относится к трудным задачам и даже несколько выходит за рамки школьной программы.

По условию задачи гелий *сильно поглощает* излучение с длиной волны $\lambda=0{,}06$ *мкм*. Это означает, что такое излучение вызывает колебания электронов в атоме гелия с большой амплитудой (это и приводит к сильному поглощению), то есть наступает резонанс. Любое вещество способно сильно поглощать излучение, частота которого совпадает с резонанс-

гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны $\lambda=0{,}06$ *мкм. Плотность жидкого гелия* $\rho=0{,}14$ *г/см*^{3}.

ной частотой его атомов. Следовательно,

$$\nu_{рез}=\frac{c}{\lambda}=5\cdot10^{15}\ гц.$$

Будем считать, что электроны в атоме гелия связаны с ядром упругими связями («пружинками»). Зная резонансную частоту, можно вычислить коэффициент «жесткости» k такой «пружинки»:

$$2\pi\nu_{рез}=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

и

$$k=4\pi^2\nu_{рез}^2\,m\approx9\cdot10^2\ кг/сек^2$$

(здесь $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг* — масса электрона).

Если такой атом поместить в постоянное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, то каждый электрон сместится из положения равновесия на расстояние $\Delta x=\frac{e\,|\vec{E}|}{k}$, где $e=1{,}6\cdot10^{-19}к$ — заряд электрона. Теперь атом можно рассматривать как электрический диполь. Его поведение в электрическом поле принято характеризовать дипольным моментом

$$p=2e\Delta x=\frac{2e^2\,|\vec{E}|}{k}.$$

Единица объема вещества приобретает дипольный момент

$$P=Np=\frac{2e^2N}{k}\,|\vec{E}|.$$

Здесь N — концентрация атомов, которую можно определить, зная плотность ρ жидкого гелия и его молярную массу μ:

$$N=N_A\ \frac{\rho}{\mu}\approx2\cdot10^{28}\ м^{-3},$$

где $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ *моль*$^{-1}$ — число Авогадро.

Явление возникновения электрических диполей в веществе в электрическом поле носит название *поляризации диэлектрика*. Способность вещества поляризоваться количественно характеризуется с помощью коэффициента поляризации α, который в единицах СИ определяется из соотношения

$$P=\alpha\varepsilon_0\,|\vec{E}|,$$

где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}\ к^2/(н\cdot м^2)$ — электрическая постоянная. В нашем случае

$$\alpha=\frac{P}{\varepsilon_0\,|\vec{E}|}=\frac{2e^2N}{\varepsilon_0k}.$$

Диэлектрическая проницаемость вещества ε связана с коэффициентом поляризации α соотношением

$$\varepsilon=1+\alpha=1+\frac{2e^2N}{\varepsilon_0k}.$$

Подставляя сюда числовые значения соответствующих величин, найдем

$$\varepsilon\approx1+\frac{2(1{,}6\cdot10^{-19})^2 2\cdot10^{28}}{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot9\cdot10^2}\approx1{,}13.$$

Полученный результат достаточно хорошо согласуется с экспериментальным значением диэлектрической проницаемости жидкого гелия.

С. Козел

Ф416*). *В теплоизолированном баллоне находится 5 г водорода и 12 г кислорода. Смесь поджигают. Определить давление и температуру в сосуде, если известно, что при образовании 1 моля воды выделяется количество теплоты Q_0=2,4·10⁵ дж. Объем сосуда 100 литров. Начальная температура смеси кислорода и водорода t_0=20°C. Удельная теплоемкость водорода при постоянном объеме равна $c_в$=14,3 кдж/(кг·град), а водяных паров — $c_п$=2,1 кдж/(кг·град).*

Прн горенни смеси происходнт химическая реакция

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O,$$

в результате которой образуется вода (точнее, водяные пары). Прн этом 2 моля (нлн 4 г) водорода соедниняются с 1 молем (нлн 32 г) кнслорода. Так как в сосуде нмеется только 12 г кнслорода, в реакцню вступят $\frac{4 \cdot 12}{32} = 1,5$ г водорода, н образуется $m_1 = 13,5$ г водяных паров. Остальные $m_2 = 3,5$ г водорода не прореагнруют н будут прнсутствовать в сосуде вместе с водянымн парамн.

Поскольку молярная масса воды равна 18 г/моль, 13,5 г воды составляют $n = \frac{13,5}{18}$ моля н прн сгораинн смесн выделяется колнчество теплоты $Q = nQ_0 = 1,8 \cdot 10^5$ дж. Эта энергия ндет на увелнченне внутренней энергнн водяных паров н водорода:

$$Q = (c_п m_1 + c_в m_2)\,\Delta T,$$

где $\Delta T = T - T_0$ — нзмененне температуры газов. Отсюда найдем T:

$$T = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{Q}{c_п m_1 + c_в m_2} \approx 2800 \text{ град}.$$

По закону Дальтона давленне в сосуде равно сумме парцнальных давленнй водяных паров н водорода:

$$p = p_п + p_в.$$

Согласно уравненню газового состояння,

$$p_п = \frac{m_1}{\mu_п}\frac{RT}{V} \text{ н } p_в = \frac{m_2}{\mu_в}\frac{RT}{V}.$$

Следовательно,

$$p = \left(\frac{m_1}{\mu_п} + \frac{m_2}{\mu_в}\right)\frac{RT}{V} \approx 5,6 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2.$$

И. Слободецкий

◆

Ф418. *Сложенные вместе смоченные оконные стекла практически невозможно отделить друг от друга, пытаясь оторвать одно стекло от другого. Почему?*

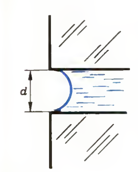


Рис. 14.

Пусть края пластин — прямые лнннн, толщниа слоя воды между пластннамн — d. Так как вода смачнвает стекло, свободная поверхность воды по краям пластнн будет нскрнвлена. Будем счнтать, что вода полностью смачнвает стекло. Тогда ее свободная поверхность — это часть поверхностн цнлнндра с раднусом поперечного сечення $r = d/2$ (рнс. 14). Искрнвленне поверхиостн жндкостн прнводнт и тому, что давленне внутрн жндкостн (в воде между пластннамн) н давленне снаружн не одннаковы. Посмотрнм, какова разиость этнх давленнй.

На тонкнй слой жндкостн, прнлегающнй к ее свободной поверхнести, действуют снла внешнего давлення, снла давлення со стороны воды н снла поверхностного натяження. Еслн длнна граннцы свободной поверхностн равна l (лннейный размер пластнны), то снла поверхностного натяження равна $2\sigma l$, где σ — коэффнцнент поверхностного натяження жндкостн. Запншем условне равновесня жндкостн:

$$pld = 2\sigma l + p'ld,$$

где p — внешнее давленне, а p' — давленне внутрн жндкостн. Отсюда разность давленнй

$$\Delta p = p - p' = \frac{2\sigma}{d} = \frac{\sigma}{r}.$$

Итак, давленне внутрн жндкостн между пластнами меиьше внешнего давлення на велнчнну σ/r. Под действнем нзбыточного давлення (н, разумеется, под действнем снлы тяжестн) верхняя пластнна прнжнмается к ннжней.

Поверхность стекла обычно не ндеально гладкая, а нмеет неровностн, бугоркн. В состояннн равновесня пластины сопрнкасаются друг с другом в вершннах бугорков (рнс. 15). Возннкающне при этом снлы реакцнн, действующие со сто-

*) Решение задачн Ф416 будет опублнковано в одном нз блнжайшнх номеров журнала.

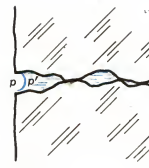


Рис. 15.

роны нижней пластины на верхнюю, таковы, что в сумме с силой давления, действующей на пластину со стороны жидкости, они уравновешивают силу тяжести и силу внешнего давления. Когда мы пытаемся оторвать верхнюю пластину, мы в первый момент разъединяем стекла, так что они уже не соприкасаются. И в дальнейшем, для того чтобы просто удерживать пластину неподвижной, нам надо прикладывать силу, равную по абсолютной величине сумме силы тяжести пластины и силы избыточного внешнего давления.

Оценим, каково дополнительное усилие, необходимое для отрыва мокрой пластины от стекла (не будем учитывать действия силы тяжести). Если высота бугорков на поверхности стекол $d \sim 10^{-6}$ *м*, то

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d} \approx \frac{2 \cdot 70 \cdot 10^{-3}\ н/м}{10^{-6}\ м} = 1{,}4 \cdot 10^5\ н/м^2.$$

При площади пластины $\sim 10^{-2}$ *м*² удерживающая сила должна быть порядка $1{,}4 \cdot 10^3$ *н* (!).

Т. Петрова

◆

Ф419*). *В некоторой Галактике обнаружена система планет, аналогичная нашей Солнечной системе. Средние плотности планет и Солнца в этой системе в $n_1=2$ раза меньше средних плотностей планет и Солнца в нашей системе, а все линейные размеры — в $n_2=3$ раза меньше соответствующих размеров в нашей системе. Сколько земных суток длится год на обнаруженном аналоге Земли?*

Запишем уравнение движения планеты массы m (аналога Земли) вокруг своего Солнца массы M:

$$\gamma \frac{mM}{L^2} = m\omega^2 L,$$

где L — радиус орбиты планеты, ω — угловая скорость вращения планеты. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\gamma \frac{M}{L^3}}.$$

Выразим массу Солнца через его радиус R и плотность ρ. Получим

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{4}{3}\gamma\pi\rho \frac{R^3}{L^3}}.$$

Аналогичное выражение можно записать для угловой скорости ω_0 вращения Земли вокруг Солнца в нашей системе:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{3}\gamma\pi\rho_0 \frac{R_0^3}{L_0^3}}.$$

Найдем отношение угловых скоростей обращения аналога Земли и самой Земли:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{4/3\gamma\pi\rho\,(R/L)^3}{4/3\gamma\pi\rho_0\,(R_0/L_0)^3}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3\left(\frac{L_0}{L}\right)^3} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{n_2}\right)^3 (n_2)^3} = \sqrt{\frac{1}{n_1}}.$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{n_1}}\,\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_0$$

— угловая скорость движения аналога Земли в $\sqrt{2}$ раза меньше угловой скорости движения самой Земли. Поэтому на аналоге Земли год длится $\frac{365}{\sqrt{2}} \approx 260$ земных суток.

И. Слободецкий

*) В опубликованном ранее условии этой задачи (см. «Квант», 1976, № 10) была допущена неточность.

Ф420. *На кронштейне ACBOE из 6 невесомых жестких стержней одинаковой длины, соединенных шарнирно (рис. 16), в точке C подвешен груз массы m. Растянут или сжат стержень AB? Найти силу упругости в этом стержне.*

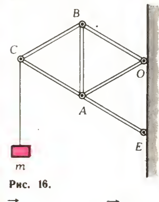


Рис. 16.

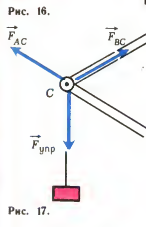


Рис. 17.

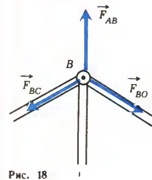


Рис. 18

Выяснить, растянут или сжат тот или иной стержень в шарнирной системе, проще всего следующим образом. Удалим мысленно из системы интересующий нас стержень и посмотрим, как будет вести себя оставшаяся часть системы. Если шарниры, которые раньше находились на концах рассматриваемого стержня, после его (мысленного) удаления начнут сближаться, значит, стержень был сжат и препятствовал сближению. И наоборот, если эти два шарнира будут расходиться, значит, мы убрали растянутый стержень.

Применяя этот метод, легко установить, что в кронштейне *ACBOE* стержни *CB*, *BO* и *OA* растянуты, а стержни *AC*, *AE* и интересующий нас стержень *AB* сжаты.

Теперь найдем численное значение силы упругости в стержне *AB*. Прежде всего, заметим, что любой стержень может действовать на шарнир, находящийся на его конце, лишь с силой, направленной *вдоль самого стержня*. Действительно, если бы это было не так, то по третьему закону Ньютона шарнир также действовал бы на стержень с силой, направленной не вдоль стержня. Такая сила создала бы момент относительно оси, проходящей через шарнир на другом конце стержня. В результате стержень вращался бы вокруг второго шарнира, а не находился в равновесии.

Рассмотрим шарнир *C* (рис. 17). Так как стержень *AC* сжат, а *BC* растянут, на шарнир *C* действуют три силы, составляющие друг с другом углы по 120°. Поскольку шарнир покоится, все три силы должны быть равны по модулю. Одна из них — сила упругости $\vec{F}_{упр}$ нити, на которой неподвижно висит груз массы m. Поэтому

$$|\vec{F}_{упр}| = m|\vec{g}|, \text{ и } |\vec{F}_{AC}| = |\vec{F}_{BC}| = m\,|\vec{g}|.$$

На шарнир *B* также действуют три силы, составляющие друг с другом углы по 120° (рис. 18). Одна из сил известна. Это сила упругости растянутого стержня *BC*: $|\vec{F}_{BC}| = m\,|\vec{g}|$. Следовательно, и остальные силы, приложенные к шарниру *B*, а именно — сила упругости растянутого стержня *BO* и искомая сила упругости сжатого стержня *AB*, равны тому же. Иначе говоря,

$$|\vec{F}_{AB}| = m\,|\vec{g}|.$$

Эту задачу можно решить и энергетически. Предположим, что нам удалось удлинить стержень *AB* на ничтожно малую величину Δx. Для этого пришлось совершить работу против искомой силы упругости $\vec{F}_{AB}$. Эта работа $\Delta A = |\vec{F}_{AB}|\Delta x$ пойдет на увеличение потенциальной энергии системы, так как груз массы m поднимется. Причем поднимется на столько же, на сколько поднимется шарнир *C*. Величину перемещения шарнира *C* можно найти из таких соображений. Диагональ (воображаемая) *OC* ромба *OACB*, проходящая через середину стержня *AB*, до удлинения стержня *AB* была горизонтальна. После удлинения стержня на малую величину Δx середина стержня *AB* поднялась на $\Delta x/2$. Следовательно, поднялась на $\Delta x/2$ и середина воображаемой диагонали ромба. Конец же этой диагонали (то есть точка *C*) поднялся на $\Delta h = 2\Delta x/2 = \Delta x$. Отсюда $|\vec{F}_{AB}|\Delta x = m|\vec{g}|\Delta h$, и следовательно,

$$|\vec{F}_{AB}| = m\,|\vec{g}|.$$

Б. Буховцев

◆

Ф421. *Тонкостенный цилиндр радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и поставили в угол (рис. 19). Коэффициент трения скольжения между стенками угла и цилиндром равен μ. Определить, сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.*

Поскольку между цилиндром и стенками угла есть трение, угловая скорость вращения цилиндра со временем уменьшается. Согласно теореме о кинетической энергии, изменение кинетической энергии цилиндра равно работе действующих на него сил. Очевидно, что в нашем случае речь идет о работе сил трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ (см. рис. 19). Поэтому прежде всего найдем эти силы.

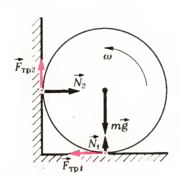


Рис. 19.

Цилиндр поступательно не перемещается. Это означает, что равнодействующая силы тяжести $m\vec g$, сил реакции стенок угла $\vec N_1$ и $\vec N_2$ и сил трения $\vec F_{тр1}$ и $\vec F_{тр2}$ равна нулю. Спроектируем силы на вертикальную и горизонтальную оси и запишем соответствующие условия равновесия:

$$|\vec N_1| + |\vec F_{тр2}| - |m\vec g| = 0, \quad |\vec N_2| - |\vec F_{тр1}| = 0.$$

Кроме того,

$$|\vec F_{тр1}| = \mu|\vec N_1| \text{ и } |\vec F_{тр2}| = \mu|\vec N_2|.$$

Отсюда

$$|\vec F_{тр1}| = \frac{\mu m|\vec g|}{1+\mu^2} \text{ и } |\vec F_{тр2}| = \frac{\mu^2 m|\vec g|}{1+\mu^2}.$$

Пусть цилиндр до остановки сделал n оборотов. Это соответствует смещению точек приложения сил трения на расстояние $2\pi Rn$. Работа сил трения при этом равна

$$-(|\vec F_{тр1}| + |\vec F_{тр2}|)\,2\pi Rn = -\frac{2\pi Rn\mu(1+\mu)\,m|\vec g|}{1+\mu^2}.$$

Приравняв эту работу изменению кинетической энергии цилиндра

$$0 - \frac{m\omega^2R^2}{2},$$

найдем n:

$$n = \frac{\omega^2R(1+\mu^2)}{4\pi\mu|\vec g|(1+\mu)}.$$

◆

Ф422. *Половина сферического конденсатора заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 20). Найти отношение плотностей зарядов на верхней и нижней половинах конденсатора и его емкость.*

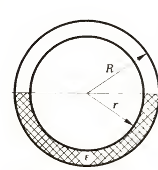


Рис. 20.

В диэлектрике напряженность электрического поля ослабляется в ε раз. Поэтому при одной и той же плотности зарядов напряженность поля в нижней половине конденсатора была бы в ε раз меньше, чем в верхней.

В то же время обкладки сферического конденсатора эквипотенциальны, поскольку они представляют собой проводящие поверхности. Следовательно, между любыми двумя точками, принадлежащими разным сферам, разность потенциалов должна быть одна и та же. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы плотность зарядов на нижней половине конденсатора была в ε раз больше, чем на верхней. При этом электрическое поле во всем конденсаторе будет таким же, как в конденсаторе без диэлектрика, но с одинаковой плотностью заряда на верхней и нижней половинах.

Теперь найдем емкость конденсатора. Для этого надо знать заряд конденсатора и разность потенциалов между его обкладками. Обозначим через σ плотность заряда на верхней половине конденсатора, а через S — площадь поверхности внутренней сферы. Тогда заряд конденсатора

$$q = \sigma S/2 + \varepsilon\sigma S/2.$$

Как мы уже говорили, электрическое поле внутри данного конденсатора такое же, как в конденсаторе без диэлектрика, но с одинаковой плотностью заряда σ, то есть с равномерно распределенным зарядом

$$q' = \sigma S.$$

Следовательно, разность потенциалов между обкладками

$$\Delta\varphi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R-r}{rR}.$$

Разделив q на $\Delta\varphi$, найдем емкость конденсатора C:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{(1+\varepsilon)\,\sigma S/2}{\frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R-r}{rR}} = \frac{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon)\,rR}{R-r}.$$

И. Слободецкий

А. Лодкин

Функциональное уравнение на сфере

В этой заметке мы решим задачу, предлагавшуюся десятиклассникам на втором (исследовательском) туре X Всесоюзной олимпиады по математике. Эта задача была помещена в «Задачнике «Кванта» («Квант», 1976, № 10, М410). Напомним ее формулировку.

На сфере радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию f, ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора. Проверьте, что эта функция обладает следующим свойством:

если M_1, M_2, M_3 — концы трех взаимно перпендикулярных радиусов сферы, то $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=1$. (*)

Во всех следующих пунктах f — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает свойством (*).

б) Пусть M и N — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем точка N, то $f(M) \geqslant f(N)$.

в) Пусть M и N — произвольные точки сферы. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем N, то $f(M) \geqslant f(N)$.

г) Докажите, что функция f совпадает с функцией, описанной в пункте а).

Решение задачи а)

Задача а) на самом деле есть в школьном учебнике «Геометрия 10» (§ 43, задача 14). Вот ее решение. Пусть нам задан прямоугольный базис (репер) $\vec{OM_1}$, $\vec{OM_2}$, $\vec{OM_3}$. Рассмотрим вектор $\vec{OP}$, где P — полюс сферы. Обозначим через $F(M)$ квадрат скалярного произведения вектора $\vec{OM}$ на $\vec{OP}$: $F(M)=(\vec{OM}\cdot\vec{OP})^2$. Ясно, что F — это та самая функция, о которой говорится в пункте а). Координаты вектора $\vec{OP}$ в базисе $\vec{OM_1}$, $\vec{OM_2}$, $\vec{OM_3}$, очевидно, равны расстояниям от точек M_1, M_2, M_3 до плоскости экватора. Но скалярный квадрат вектора $\vec{OP}$ равен единице. Это и дает нам соотношение $F(M_1)+F(M_2)+F(M_3)=1$ для функции F.

Всюду дальше у нас f — произвольная неотрицательная функция на сфере, равная нулю во всех точках экватора и обладающая свойством (*).

Решение задач б) и в)

Очевидно, что пункт б) задачи следует из в); поэтому сразу докажем утверждение пункта в).

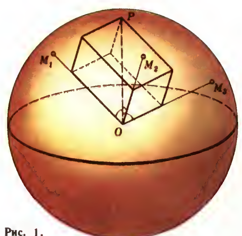


Рис. 1.

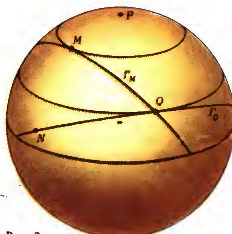


Рис. 2.

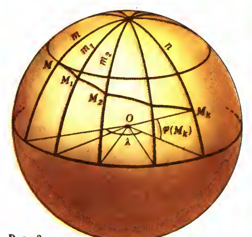


Рис. 3.

Из условия (*) следует, что функция f принимает одинаковые значения в диаметрально противоположных точках сферы. Поэтому нам достаточно рассмотреть значения функции только для точек северного полушария.

Итак, *пусть M и N — две точки северного полушария. Докажем, что если M дальше от плоскости экватора, чем N, то $f(M) \geqslant f(N)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим окружность большого круга, самой северной точкой которой является M. Пусть Γ_M — часть этой окружности, лежащая в северном полушарии.

Предположим вначале, что N также лежит на Γ_M. Обозначим через N' такую точку дуги Γ_M, что $[ON'] \perp [ON]$, через M' — одну из двух точек пересечения дуги Γ_M с экватором. Тогда из (*) следует равенство $f(N) + f(N') = f(M) + f(M')$, поскольку $[OM] \perp [OM']$, и точки M, M', N, N' лежат в одной плоскости, — так что для точек M, M' и N, N' «третьей» точкой будет одна и та же: конец радиуса, перпендикулярного плоскости окружности Γ_M. Так как $f(M') = 0$, то $f(M) \geqslant f(N)$.

Пусть теперь точка N находится в области северного полушария, лежащей к югу от Γ_M. Тогда найдется такая точка Q на Γ_M, что дуга большого круга Γ_Q проходит через N (рис. 2). Применяя предыдущее рассуждение к парам точек M и Q, Q и N, получаем неравенства $f(M) \geqslant f(Q) \geqslant f(N)$.

Если же N лежит к северу от Γ_M, то для «спуска» из M в N может понадобиться уже более двух шагов. Разделим угол λ между плоскостями меридианов m и n, проходящих через точки M и N соответственно, на k равных частей плоскостями меридианов $m_1, \ldots, m_{k-1}$ (рис. 3). Выйдем из M по дуге Γ_M и в точке M_1 пересечения этой дуги с меридианом m_1 свернем на дугу Γ_{M_1}. Дойдя до точки M_2 пересечения Γ_{M_1} с m_2, повернем на Γ_{M_2} и т. д. Последней точкой нашего путешествия будет точка M_k на n. Вы, очевидно, заметили, что чем больше k, тем «положе» траектория спуска. Нетрудно доказать, что широта $\varphi(M_k)$ точки M_k может сколь угодно приближаться к $\varphi(M)$ (заметьте, что $\operatorname{tg}\varphi(M_k) =$

$$= \operatorname{tg}\varphi(M_{k-1})\cos\frac{\lambda}{k} = \ldots =$$

$$= \operatorname{tg}\varphi(M)\cos^k\frac{\lambda}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \operatorname{tg}\varphi(M)),$$ и следовательно, M_k при достаточно большом k окажется севернее N. На спуск из M_k в N понадобится уже не более двух шагов.

Функция f (M) зависит только от широты

Обозначим параллель, находящуюся на расстоянии $\sqrt{x}$ от плоскости экватора, через Π_x. Чтобы решить задачу г), нам понадобится такая

Л е м м а. *Если $x+y+z=1$, то можно построить прямоугольный ба-*

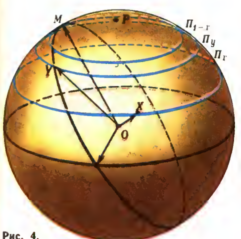


Рис. 4.

зис с концами на этих параллелях Π_x, Π_y, Π_z.

Доказательство. Возьмем радиус OX с концами в какой-то точке X параллели Π_x. Построим перпендикулярный к нему радиус OY с концами на параллели Π_y. Для этого возьмем большой круг, плоскость которого перпендикулярна радиусу OX (рис. 4). Если $y=1-x$, то три радиуса с концами в точке X, в одной из точек пересечения окружности этого большого круга с экватором и в самой северной точке окружности этого круга, дадут нам нужный ортогональный репер. Если же $y<1-x$, то, взяв любую из двух точек пересечения окружности этого большого круга с параллелью Π_y, получим радиус OY, перпендикулярный OX.

Проведем теперь радиус, ортогональный к OX и OY; пусть его конец оказался в точке V параллели Π_v. Из задачи а) следует, что $F(X)+F(Y)+F(V)=x+y+v=1$ (напомним, что функция F каждой точке сферы ставит в соответствие квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора). Но, с другой стороны, и $x+y+z=1$; значит, $z=v$, т. е. параллели Π_v и Π_z совпадают. Лемма доказана.

Докажем теперь, что функция f постоянна на каждой параллели, то есть что она действительно зависит только от широты.

Будем говорить, что функция f на параллели Π_x *претерпевает разрыв, не меньший* ε ($\varepsilon>0$), если на Π_x найдутся такие точки X и X', что $|f(X)-f(X')|\geq\varepsilon$. Возьмем параллель Π_x, на которой у f разрыв, не меньший ε, и пусть две параллели Π_y и Π_z таковы, что концы трех взаимно перпендикулярных радиусов (репера) соответственно находятся на параллелях Π_x, Π_y и Π_z. Как мы уже доказали, $F(X)+F(Y)+F(Z)=x+y+z=1$ для всех $X\in\Pi_x$, $Y\in\Pi_y$, $Z\in\Pi_z$ (F — это функция из пункта а)).

Начнем вращать этот ортогональный репер вокруг оси сферы, проходящей через полюсы; при этом концы наших радиусов будут перемещаться — каждый по своей параллели. Покажем, что либо на параллели Π_z, либо на параллели Π_y функция f претерпевает разрыв, не меньший $\frac{\varepsilon}{2}$, то есть докажем, что либо на Π_y найдутся две точки Y, Y' такие, что $|f(Y)-f(Y')|\geq\frac{\varepsilon}{2}$, либо на Π_z найдутся точки Z, Z' такие, что $|f(Z)-f(Z')|\geq\frac{\varepsilon}{2}$. Допустим, что это не так; тогда для всех Y_1, $Y_2\in\Pi_y$ и Z_1, $Z_2\in\Pi_z$ будет $|f(Y_1)-f(Y_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(Z_1-f(Z_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Но мы знаем, что в соответствующих тройках точек X, Y, Z и X', Y', Z'

$$f(X)+f(Y)+f(Z)=$$
$$=f(X')+f(Y')+f(Z')=1.$$

Отсюда

$$\varepsilon\leqslant|f(X)-f(X')|=|f(Y')-f(Y)+$$
$$+f(Z')-f(Z)|\leqslant|f(Y)-f(Y')|+$$
$$+|f(Z)-f(Z')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т. е. $\varepsilon<\varepsilon$ — противоречие. Тем самым либо на параллели Π_y, либо на Π_z будет разрыв не меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$.

Из леммы следует, что если $y+z=1-x$, то либо на Π_y, либо на Π_z функция f терпит разрыв, не меньший $\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем $N>\frac{2}{\varepsilon}$ и рассмотрим $2N$ параллелей

$$\Pi_{y_1}, \Pi_{y_2}, \ldots, \Pi_{y_N}, \Pi_{z_1}, \Pi_{z_2}, \ldots, \Pi_{z_N},$$

соответствующих числам

$$y_1<y_2<\ldots<y_N<\frac{1-x}{2}, z_1>z_2>\ldots$$

$\ldots > z_N$, $z_i = 1 - x - y_i$ (параллель Π_x, т. е. число x, у нас фиксирована). По доказанному либо на Π_{y_i}, либо на Π_{z_i} у f разрыв не меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$, так что, пройдя через эти $2N$ параллелей с юга на север, мы получим, что $f > \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = 1$ (поскольку f неотрицательна), что невозможно. Значит, предположение, что f не постоянна хотя бы на одной параллели, неверно.

Таким образом, f фактически зависит только от x, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, и мы можем от функции f, заданной на сфере, перейти к функции g, определенной на отрезке $[0, 1]$: $g(x) = f(X)$, где $X \in \Pi_x$. Выше мы доказали, что если $x+y+z=1$, то $g(x)+g(y)+g(z)=1$. Но легко сообразить, что $g(x)+g(1-x)=1$; следовательно, $1-g[1-(x+y)]=g(x+y)$. Отсюда получаем, что

$$g(x) + g(y) = g(x + y) \qquad (**)$$

для всех x и y, таких, что $x+y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Решение задачи г)

Решая задачу в), мы доказали, что $g(x) \leqslant g(y)$, если $x \leqslant y$. Кроме того, $g(1)=1$. Докажем, что монотонная (неубывающая) и ограниченная функция g, определенная на отрезке $[0, 1]$ и обладающая свойством $(**)$, — обязательно линейная функция, а именно, $g(x)=x$.

Действительно, из соотношения $(**)$ моментально следует, что $g(x_1)+g(x_2)+\ldots+g(x_n)=g(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, откуда $g(nx)=ng(x)$, если $nx<1$. Отсюда $ng\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=g(1)=1$, следовательно, $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$. Поэтому $g\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$ при $m<n$, то есть $g(x)=x$ при всех рациональных x. Пусть теперь x иррационально, r_1 и r_2 — рациональные числа и $r_1<x<r_2$. Тогда $r_1=g(r_1) \leqslant g(x) \leqslant g(r_2)=r_2$. Сравнивая эти два неравенства, получаем $|g(x)-x| \leqslant |r_2-r_1|$. Так как разность r_2-r_1 может быть сколь угодно малой (можно в качестве r_1 и r_2 брать десятичные приближения x), левая часть неравенства обязана быть нулем. Следовательно, $g(x)=x$ теперь уже для произвольного x. Вспоминая, что $g(x)=f(X)$, где $X \in \Pi_x$, получаем, что $f(X)=x$ для всех $X \in \Pi_x$, то есть функция $f(M)$ совпадает с функцией, о которой говорится в задаче а).

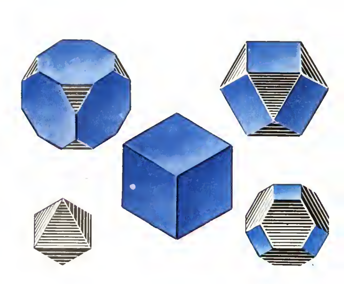
Пять многогранников

На этом рисунке вы видите пять многогранников, все их грани — правильные многоугольники. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из гексаэдра (куба) с помощью одной и той же операции, только применяется она в разных случаях по-разному.

Как вы думаете, что это за операция?

Вычислите длины ребер всех многогранников, если длина ребра гексаэдра равна 1.

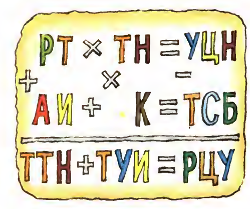
В. Тихонов



«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В действиях на рисунке каждая цифра зашифрована некоторой буквой. Расшифруйте эту запись, а затем запишите буквы по номерам в порядке возрастания (с 0 до 9). Какое слово у вас получилось?



2. Как без помощи линейки узнать, является ли данный лист бумаги с прямолинейными границами квадратом?



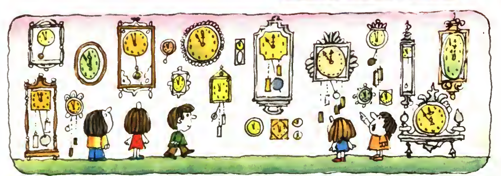
3. Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в восемь раз больше числа отсутствующих. Сегодня не пришли еще два ученика, и оказалось, что отсутствуют 20% от числа учеников, присутствующих в классе.

Сколько всего учеников в классе?

4. «Бьют часы двенадцать раз...» поется в популярной песне. А сколько всего ударов в сутки делают часы, если в двенадцать часов (дня или ночи) они бьют двенадцать раз, в два часа — два раза и т. д., да еще в промежутках бьют один раз, отмечая середину каждого часа?



5. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.



Н. Носов

Витя Малеев решает задачи



Пришел я домой и сразу взялся за дело. Такая решимость меня одолела, что я даже сам удивился. Сначала я задумал сделать самые трудные уроки, как Ольга Николаевна нас учила, а потом взяться за то, что полегче. Как раз в этот день была задана задача по арифметике. Недолго думая я раскрыл задачник и принялся читать задачу:

«В магазине было 8 пил, а топоров в три раз больше. Одной бригаде плотников продали половину топоров и три пилы за 84 рубля. Оставшиеся топоры и пилы продали другой бригаде плотников за 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила?»

Сначала я совсем ничего не понял и начал читать задачу во второй раз, потом в третий... Постепенно я понял, что тот, кто составляет задачи, нарочно запутывает их, чтоб ученики не могли сразу решить. Написано: «В магазине было 8 пил, а топоров в три раза больше». Ну и написали бы просто, что топоров было 24 штуки. Ведь если пил было 8, а топоров было в три раз больше, то каждому ясно, что топоров было 24. Нечего тут и огород городить! И еще: «Одной бригаде плотников продали половину топоров и 3 пилы за 84 рубля». Сказали бы просто: «Продали 12 топоров». Будто не ясно, раз топоров было 24, то половина будет 12. И вот все это продали, значит, за 84 рубля. Дальше опять говорится, что оставшиеся пилы и топоры продали другой бригаде плотников за 100 рублей. Какие это оставшиеся? Будто нельзя сказать по-человечески? Если всего было 24 топора, а продали 12, то и осталось, значит, 12. А пил было всего-навсего 8; 3 продали одной бригаде, значит, другой бригаде продали 5. Так бы и написали, а то запутают, запутают, а потом небось говорят, что ребята бестолковые — не умеют задачи решать!

Я переписал задачу по-своему, чтоб она выглядела попроще, и вот что у меня получилось:

«В магазине было 8 пил и 24 топора. Одной бригаде плотников продали 12 топоров и 3 пилы за 84 рубля. Другой бригаде плотников продали 12 топоров и 5 пил за 100 рублей. Сколько стоит одна пила и один топор?»

Переписавши задачу, я снова прочитал ее и увидел, что она стала немножко короче, но все-таки я не мог додуматься, как ее сделать, потому что цифры путались у меня в голове и мешали мне думать. Я решил как-нибудь подсократить задачу, чтоб в ней было меньше цифр. Ведь совершенно не важно, сколько было в магазине этих самых пил и топоров, если в конце концов их все продали. Я сократил задачу, и она получилась вот какая:

«Одной бригаде продали 12 топоров и 3 пилы за 84 рубля. Другой бригаде продали 12 топоров и 5 пил за 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила?»

Задача стала короче, и я стал думать, как бы ее еще сократить. Ведь

*) Отрывок из книги Н. Носова «Витя Малеев в школе и дома», Москва, «Детгиз», 1959.

не важно, кому продали эти пилы и топоры. Важно только, за сколько продали. Я подумал, подумал — и задача получилась такая:

«12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля.

12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей.

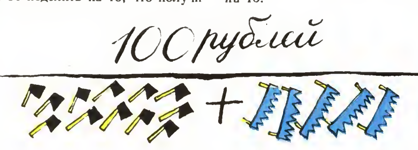
Сколько стоит один топор и одна пила?»

Сокращать больше было нельзя, и я стал думать, как решить задачу. Сначала я подумал, что если 12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля, то надо сложить все топоры и пилы вместе и 84 поделить на то, что получнмать топоры от денег и то, что осталось, делить на пилы, и чего я только ни делал, никакого толку не выходило. Тогда я взял задачу и пошел к Ване Пахомову.

— Слушай, — говорю, — Ваня, 12 топоров и 3 пнлы вместе стоят 84 рубля, а 12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила? Как, по-твоему, нужно сделать эту задачу?

— А как ты думаешь? — спрашивает он.

— Я думаю, нужно сложить 12 топоров и 3 пилы и 84 поделить на 15.



лось. Я сложил 12 топоров и 3 пилы, получилось 15. Тогда я стал делить 84 на 15, но у меня не поделилось, потому что получился остаток. Я понял, что произошла какая-то ошибка и стал искать другой выход. Другой выход нашелся такой: я сложил 12 топоров и 5 пил, получилось 17, и тогда я стал делить 100 на 17, но у меня опять получился остаток. Тогда я сложил все 24 топора между собой и прибавил к ним 8 пил, а рубли тоже сложил между собой и стал делить рубли на топоры с пиламн, но деление все равно не вышло. Тогда я стал отнимать пилы от топоров, а деньги делить на то, что получилось, но все равно у меня ничего не получилось. Потом я еще пробовал складывать между собой пилы и топоры по отдельности, а потом отни-

— Постой! Зачем тебе складывать пилы и топоры?

— Ну, я узнаю, сколько было всего, потом 84 разделю на сколько всего и узнаю, сколько стоила одна.

— Что «одна»? Одна пила или один топор?

— Пила, — говорю, — или топор.

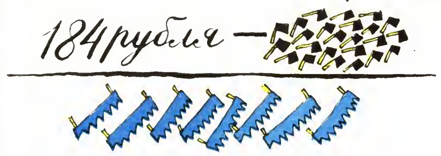
— Тогда у тебя получится, что они стоили одинаково.

— А они разве не одинаково?

— Конечно, не одинаково. Ведь в задаче не говорится, что они стоили поровну. Наоборот, спрашивается, сколько стоит топор и сколько пила отдельно. Значит, мы не имеем права их складывать.

— Да нх, — говорю, — хоть складывай, хоть не складывай, все равно ннчего не выходит!

— Вот поэтому и не выходит.



— Что же делать? — спрашиваю я.

— А ты подумай.

— Да я уже два часа думал!

— Ну, присмотрись к задаче, — говорит Ваня. — Что ты видишь?

— Вижу, — говорю, — что 12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля, а 12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей.

— Ну, ты замечаешь, что в первый раз и во второй топоров куплено одинаковое количество, а пил на две больше?

— Замечаю, — говорю я.

— А замечаешь, что во второй раз уплатили на 16 рублей дороже?

— Тоже замечаю. В первые раз уплатили 84 рубля, а во второй раз — 100 рублей. 100 минус 84, будет 16.

— А как ты думаешь, почему во второй раз уплатили на 16 рублей больше?

— Это каждому ясно, — ответил я, — купили 2 лишние пилы, вот и пришлось уплатить лишних 16 рублей.

— Значит, 16 рублей заплатили за 2 пилы?

— Да, — говорю, — за 2.

— Сколько же стоит одна пила?

— Раз две 16, то одна, — говорю, — 8.

— Вот ты и узнал, сколько стоит одна пила.

— Тьфу! — говорю. — Совсем простая задача! Как это я сам не догадался?!

— Постой, тебе еще надо узнать, сколько стоит топор.

— Ну, это уж пустяк, — говорю я. — 12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля. 3 пилы стоят 24 рубля. 84 минус 24, будет 60. Значит, 12 топоров стоят 60 рублей, а один топор — 60 поделить на 12, будет 5 рублей.

Я пошел домой, и очень мне было досадно, что я не сделал эту задачу сам. Но я решил в следующий раз обязательно сам сделать задачу. Хоть пять часов буду сидеть, а сделаю.

На следующий день нам по арифметике ничего не было задано, и я был рад, потому что это не такое уж большое удовольствие задачи решать.

«Ничего, — думаю, — хоть один день отдохну от арифметики».

Но все вышло совсем не так, как я думал. Только я сел за уроки, вдруг Лика говорит:

— Витя, нам тут задачу задали, я никак не могу решить. Помоги мне.

Я только поглядел на задачу и думаю:

«Вот будет история, если я не смогу решить! Сразу весь авторитет пропадет».

Я говорю ей:

— Мне сейчас очень некогда. У меня тут своих уроков полно. Ты поди погуляй часика два, а потом придешь, я помогу тебе.

Думаю: «Пока она будет гулять, я тут над задачей подумаю, а потом объясню ей».

— Ну, я пойду к подруге, — говорит Лика.

— Иди, иди, — говорю, — только не приходи слишком скоро. Часа два можешь гулять или три. В общем, гуляй сколько хочешь.

Она ушла, а я взял задачник и стал читать задачу:

«Мальчик и девочка рвали в лесу орехи. Они сорвали всего 120 штук. Девочка сорвала в два раза меньше мальчика. Сколько орехов было у мальчика и девочки?

Прочитал я задачу, и даже смех меня разобрал. «Вот так задача! — думаю. — Чего тут не понимать? Ясно, 120 надо поделить на 2, получится 60. Значит, девочка сорвала 60 орехов. Теперь нужно узнать, сколько мальчик: 120 отнять 60, тоже будет



60... Только как же это так? Получается, что они сорвали поровну, а в задаче сказано, что девочка сорвала в два раза меньше орехов. Ага! — думаю. — Значит, 60 надо поделить на 2, получится 30. Значит, мальчик сорвал 60, а девочка 30 орехов». Посмотрел в ответ, а там: мальчик 80, а девочка 40.

— Позвольте! — говорю. — Как же это? У меня получается 30 и 60, а тут 40 и 80.

Стал проверять — всего сорвали 120 орехов. Если мальчик сорвал 60, а девочка 30, то всего получается 90. Значит, неправильно! Снова стал делать задачу. Опять у меня получается 30 и 60! Откуда же в ответе берутся 40 и 80? Прямо заколдованный круг получается!

Вот тут-то я и задумался. Читал задачу раз десять подряд и никак не мог найти, в чем здесь загвоздка.

«Ну, — думаю, — это третьеклассникам задают такие задачи, что и четвероклассник не может решить! Как же они учатся, бедные?»

Стал я думать над этой задачей. Стыдно мне было не решить ее. Вот, скажет Лика, в четвертом классе, а для третьего класса задачу не смог решить! Стал я думать еще усиленнее. Ничего не выходит. Прямо затмение на меня нашло! Сижу и не знаю, что делать. В задаче говорится, что всего орехов было 120, и вот надо разделить их так, чтоб у одного было в два раза больше, чем у другого. Если б тут были какие-нибудь другие цифры, то еще можно было бы что-нибудь придумать, а тут сколько ни дели 120 на 2, сколько ни отнимай 2 от 120, сколько ни умножай 120 на 2, все равно 40 и 80 не получится.

С отчаяния я нарисовал в тетрадке ореховое дерево, а под деревом мальчика и девочку, а на дереве 120 орехов. И вот я рисовал эти орехи, рисовал, а сам все думал и думал. Только мысли мои куда-то не туда шли, куда надо. Сначала я думал, почему мальчик нарвал вдвое больше, а потом догадался, что мальчик, наверно, на дерево влез, а девочка снизу рвала, вот у нее и получилось меньше. Потом я стал рвать орехи, то есть просто стирал их ре-



зинкой с дерева и отдавал мальчику и девочке, то есть пририсовывать орехи у них над головой. Потом я стал думать, что они складывали орехи в карманы. Мальчик был в курточке, я нарисовал ему по бокам два кармана, а девочка была в передничке. Я на этом передничке нарисовал один карман. Тогда я стал думать, что может быть, девочка нарвала орехов меньше потому, что у нее был только один карман. И вот я сидел и смотрел на них: у мальчика два кармана, у девочки один карман, и у меня в голове стали появляться какие-то проблески. Я стер орехи у них над головами и нарисовал им карманы, оттопыренные, будто в них лежали орехи. Все 120 орехов теперь лежали у них в трех карманах: в двух карманах у мальчика и в одном кармане у девочки, а всего, значит, в трех. И вдруг у меня в голове, будто молния, блеснула мысль: «Все 120 орехов надо делить на три части! Девочка возьмет себе одну часть, а две части останутся мальчику, вот и будет у него вдвое больше!» Я быстро поделил 120 на 3, получилось 40. Значит, одна часть 40. Это у девочки было 40 орехов, а у мальчика две части. Значит, 40 помножить на 2, будет 80! Точно, как в ответе. Я чуть не подпрыгнул от радости и скорей побежал к Ване Пахомову, рассказать ему, как я сам додумался решить задачу.

Выбегаю на улицу, смотрю — идет Шишкин.

— Слушай, — говорю, — Костя, мальчик и девочка рвали в лесу орехи, нарвали 120 штук, мальчик взял

себе вдвое больше, чем девочка. Что делать, по-твоему?

— Надавать, — говорит, — ему по шее, чтоб не обижал девочек!

— Да я не про то спрашиваю! Как им разделить, чтоб у него было вдвое?

— Пусть делят, как сами хотят. Чего ты ко мне пристал! Пусть поровну делят.

— Да нельзя поровну. Это задача такая.

— Какая еще задача?

— Ну, задача по арифметике.

— Тьфу! — говорит Шишкин. — У меня морская свинка подохла, я ее только позавчера купил, а он тут с задачами лезет!

Послесловие

С тех пор, как Николаем Носовым была написана замечательная повесть «Витя Малеев в школе и дома», преподавание математики в школе сильно изменилось. Теперь предмет стал называться математикой, а не арифметикой, изменилось и его содержание. Нынешний третьеклассник или четвероклассник уже не станет мучительно раздумывать над задачей об орехах. Он обозначит число орехов у девочки через «x», а тогда у мальчика будет «$2x$» орехов. Таким образом, всего орехов было «$3x$», а известно, что их было 120. Значит, $3x = 120$, отсюда $x = 40$, $2x = 80$. Задача решена.

Что же касается задачи о «пилах и топорах», то и здесь может прийти на помощь всемогущий «x». Вспомним окончательную форму задачи, которую она приняла после упрощений:

«12 топоров и 3 пилы стоят 84 рубля,
12 топоров и 5 пил стоят 100 рублей».

Обозначим стоимость пилы через «x», тогда из первого условия 12 топоров стоят $84 - 3x$ рублей, а один топор $(84 - 3x) : 12$ рублей. Запишем теперь второе условие:

$$12 \cdot (84 - 3x) : 12 + 5x = 100$$

или

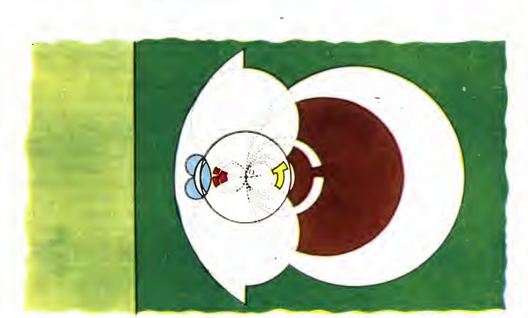
$$84 - 3x + 5x = 100,$$

откуда $x = 8$ (рублей). Снова на помощь пришел стандартный метод, который приводит к цели без долгих раздумий.

Однако не кажется ли вам, что решение Вани Пахомова гораздо красивее. Оно покоряет нас простотой и изяществом логического рассуждения, приводящего к решению задачи. Попробуйте и вы решать задачи не только стандартным способом (с помощью уравнений), но и просто логическим рассуждением. Напишите нам, какие задачи из учебников 3—5 классов проще решать логически, чем с помощью уравнений.

А. Савин

К статье В. Вавилова «Геометрия круга» (см. с. 40).





И. Константинов

Насыщенный пар

Давление газа зависит как от его температуры, так и от плотности газа (то есть от массы газа и занимаемого им объема). В то же время давление насыщенного пара зависит только от температуры и при данной температуре — вполне определенная величина, характеризующая вещество жидкости. С чем связано это различие между паром и газом?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, выясним, прежде всего, почему жидкость испаряется.

На молекулы поверхности жидкости действуют силы притяжения, направленные внутрь жидкости. Почему же молекулы вылетают наружу? Все объясняется тем, что молекулы в жидкости движутся хаотически. Поэтому вблизи поверхности всегда найдутся молекулы, скорости которых направлены наружу, и если абсолютные значения скоростей таких молекул достаточно велики, то они «прорвутся» через поверхность жидкости, то есть испарятся. Для испарения каждой молекулы силы притяжения должны совершить вполне определенную работу A. Назовем ее работой испарения молекулы. Очевидно, что эта работа отрицательна, так как силы притяжения направлены против перемещения молекулы. Следовательно, при испарении молекулы ее кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$ уменьшается. Значит, через поверхность жидкости могут прорваться только те молекулы, кинетическая энергия которых $\frac{mv^2}{2}$ больше работы испарения A. Именно такие быстрые молекулы вылетают из жидкости и образуют над ее поверхностью пар.

Так как при испарении жидкости из нее вылетают наиболее быстрые молекулы, то средняя кинетическая энергия молекул в оставшейся жидкости уменьшается; значит, жидкость при испарении должна охладиться. Опыт подтверждает, что это действительно так. (Вспомните, например, как охлаждается поверхность нашей кожи, когда она смочена быстроиспаряющимся спиртом или эфиром.) Чтобы испаряющаяся жидкость не охлаждалась, к ней необходимо подводить определенное количество теплоты от какого-нибудь источника. Например, при испарении воды с поверхности морей и океанов таким источником служит Солнце. Напомним, что количество теплоты, которое необходимо подвести к жидкости, чтобы при испарении одного килограмма жидкости ее температура не изменялась, называется удельной теплотой испарения.

Надо помнить, что молекулы пара над жидкостью тоже движутся хаотически, и часть их достигает поверхности жидкости. Эти молекулы снова возвращаются в жидкость. Одновременно с испарением жидкости происходит обратный процесс возвращения молекул пара в жидкость, или конденсация пара. От этого процесс превращения жидкости в пар замедляется. Но если непрерывно удалять образующийся пар, например, сдувая его, испарение жидкости ускорится. Ясно, что при этом жидкость быстрее охлаждается. Вот почему дуют на горячий суп или чай. Едва ли нужно пояснять, что при конденсации пара выделяется столько же теплоты, сколько поглощается при испарении.

Выше мы рассмотрели процесс испарения жидкости с открытой ее поверхности в сосуде, из которого жидкость может постепенно испариться целиком. Иное дело, когда жидкость находится в закрытом сосуде и не

заполняет его. В таком случае образующийся пар не удаляется из сосуда.

В герметически закрытом сосуде, температура которого поддерживается неизменной, жидкость может сохраняться сколь угодно долго, не изменяя своего объема. Значит ли это, что испарение прекратилось? Конечно, нет. По-прежнему «быстрые» молекулы покидают поверхность жидкости, но одновременно происходит конденсация образовавшегося над жидкостью пара. И когда число молекул, вылетающих за данное время из жидкости, станет равным числу молекул, возвращающихся обратно за то же время, тогда массы как жидкости, так и пара будут оставаться неизменными. Наступает *равновесие* между жидкостью и паром. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называют насыщенным паром.

Находящиеся в равновесии жидкость и соприкасающийся с нею пар непрерывно обмениваются своими молекулами. Каково же число обмениваемых за данное время молекул? Сколько молекул вылетает из жидкости и возвращается обратно за данное время?

Пусть через единицу площади поверхности за единицу времени вылетает в среднем одно и то же число молекул z_0, а попадает в нее z молекул. Между жидкостью и паром наступает равновесие, когда $z_0 = z$.

Вычислить значение z_0 трудно хотя бы потому, что мы не знаем точного значения сил притяжения между молекулами пара и жидкости. Зато рассчитать значение z довольно просто. Действительно, внутрь жидкости проникает каждая молекула пара, попавшая на поверхность жидкости; следовательно, z равно числу молекул, попадающих за единицу времени на единицу площади поверхности жидкости. Найдем это число.

Направим ось X перпендикулярно свободной поверхности жидкости в сосуде (рис. 1). Будем считать, что проекции скоростей всех молекул пара на ось X одинаковы по абсолютной величине. Тогда у половины всех молекул проекция скорости на ось X

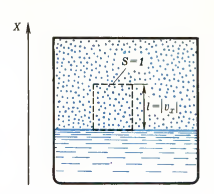


Рис. 1.

положительна и равна $|v_x|$, а у половины — отрицательна и равна $-|v_x|$.

За единицу времени на единицу площади поверхности попадут те молекулы пара, которые находятся от нее на расстоянии $l \leqslant |v_x|$ и имеют проекцию скорости на ось X, равную $-|v_x|$. Иными словами, за единицу времени на единицу площади поверхности жидкости попадет половина молекул пара, находящихся в объеме $V_1 = |v_x|$, примыкающем к поверхности. Если объем, занимаемый в сосуде паром, равен V и в этом объеме находится N молекул пара, то в объеме V_1 число молекул пара равно $N_1 = \frac{N}{V} V_1 = \frac{N|v_x|}{V}$.

Таким образом, число молекул пара, попадающих за единицу времени на единицу площади поверхности жидкости, равно

$$z = \frac{1}{2} \frac{N}{V} |v_x|.$$

Мы считали, что проекции скоростей молекул на ось X одинаковы по абсолютной величине. Однако это не так, и точнее было бы пользоваться не значением $|v_x|$, а средним значением этой величины. Поэтому

$$z = \frac{1}{2} \frac{N}{V} |\bar{v}_x|.$$

Если число z_0 молекул, покидающих жидкость через единицу площади поверхности за единицу времени, равно этому значению z, то между жидкостью и паром устанавливается равновесие.

Итак, число молекул, возвращающихся из пара в жидкость, зависит

не только от температуры (от $|\bar{v}_x|$), но и от плотности пара $\left(\text{от } \frac{N}{V}\right)$. Следовательно, пар над жидкостью станет насыщенным, когда в занимаемом им объеме V накопится как раз столько молекул N, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2}\ \frac{N}{V}\ |\bar{v}_x| = z_0. \qquad (1)$$

Напомним, что отношение $\frac{N}{V}$ определяет давление p пара при данной температуре:

$$p = \frac{N}{V}\ kT. \qquad (2)$$

Если пар насыщенный, то, согласно (1), $\frac{N}{V} = \frac{2z_0}{|\bar{v}_x|}$, и давление пара равно

$$p_н = \frac{2z_0 kT}{|\bar{v}_x|}. \qquad (3)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что давление насыщенного пара действительно не зависит от занимаемого им объема и при данной температуре вполне определенная величина, характерная для данной жидкости.

Может показаться, что независимость давления насыщенного пара от объема противоречит уравнению газового состояния (2), из которого следует, что при постоянной температуре T давление газа обратно пропорционально занимаемому им объему V. Может быть, для насыщенного пара неприменимо уравнение состояния газа? В действительности никакого противоречия нет, и уравнение (2) вполне применимо.

Из уравнения (2) следует, что давление p газа обратно пропорционально его объему при условии, что N постоянно, то есть когда масса газа не изменяется. А для насыщенного пара это условие не выполняется. При изменении объема насыщенного пара его масса тоже изменяется. Действительно, если сжать насыщенный пар так, что его объем уменьшится от значения V до какого-нибудь значения V_1, немедленно увеличится отношение N/V_1. Тогда, как видно из формулы (1), увеличится число z молекул, возвращающихся из пара в жидкость, и оно превысит число z_0

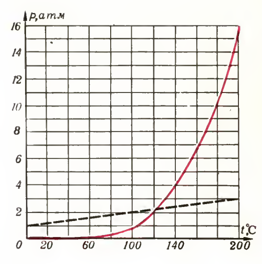


Рис. 2.

«испаряющихся» молекул. Вследствие этого число N молекул пара начнет уменьшаться. Когда оно уменьшится до такого значения N_1, при котором

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N}{V},$$

равновесие восстановится. Но тогда, в соответствии с уравнением (2), восстановится и давление p пара. Так это и происходит на опыте.

При уменьшении объема насыщенного пара часть его конденсируется и масса пара уменьшается во столько раз, во сколько раз уменьшается его объем. Поэтому давление насыщенного пара не зависит от его объема. (Нетрудно догадаться, что при увеличении объема, занимаемого насыщенным паром, от значения V до значения V_1 все произойдет в обратном порядке: число «конденсирующихся» молекул станет меньше чем число испаряющихся, вследствие этого число молекул в паре увеличится до такого значения N_1, при котором $\frac{N_1}{V_1} = \frac{N}{V}$, и давление пара останется прежним.)

Итак, мы выяснили, что давление насыщенного пара при заданной температуре имеет вполне определенное значение, характерное для данного вещества. Мы подчеркнули «при заданной температуре», так как опыт показывает, что давление насыщенного пара над жидкостью зависит от температуры.

Получить из опыта эту зависимость нетрудно. Для этого нужно снабженный манометром закрытый сосуд с жидкостью поместить в нагреватель и измерять давление пара при разных температурах. На рисунке 2 приведен типичный график зависимости давления насыщенного пара от температуры для воды. Эта зависимость совсем не похожа на знакомую нам линейную зависимость давления газа или ненасыщенного пара от температуры, которая показана на том же графике пунктиром. Из графика, например, видно, что при повышении температуры от 373 °K (100 °C) до 473 °K (200 °C) давление насыщенного пара воды возрастает в 16 раз, от одной атмосферы до 16 атмосфер. Давление же газа или ненасыщенного пара возрастает всего лишь на 27 %, как это и следует из уравнения состояния газа.

Чем же объясняется такое сильное различие?

Обратимся еще раз к уравнению состояния газа

$$p = \frac{N}{V} kT.$$

Из этого уравнения видно, что когда плотность молекул $\frac{N}{V}$ не изменяется с изменением температуры, то давление пара пропорционально температуре T. Наблюдаемую на опыте более «крутую» зависимость давления p насыщенного пара от температуры можно объяснить только тем, что с повышением температуры растет и отношение $\frac{N}{V}$, то есть растет плотность пара.

Почему повышение температуры вызывает увеличение плотности насыщенного пара? Потому что с повышением температуры жидкости резко возрастает доля ее молекул, у которых кинетическая энергия больше работы испарения. Значит, при повышении температуры резко увеличивается число z_0 молекул, испаряющихся из жидкости. А это, в свою очередь, приводит к увеличению плотности молекул пара $\frac{N}{V}$ и его давления p.

Правда, с увеличением температуры растет и скорость молекул пара, то есть растет значение $|\bar{v}_x|$, но этот рост мал по сравнению с ростом плотности $\frac{N}{V}$.

Давление насыщенного пара растет при повышении температуры главным образом за счет увеличения количества жидкости, переходящей в пар.

Ясно, что если вся жидкость в закрытом сосуде испарится целиком, пар станет ненасыщенным и при дальнейшем нагревании его давление p растет пропорционально температуре T. Ненасыщенный пар можно превратить в насыщенный. Для этого его надо охладить. По мере понижения температуры давление пара будет падать пропорционально температуре до тех пор, пока не начнется его конденсация — на стенках сосуда появятся мелкие капельки жидкости в виде росы. Это значит, что пар стал насыщенным. Температура, при которой пар становится насыщенным, получила название точки росы.

Упражнения

1. Вычислить давление ненасыщенного водяного пара в сосуде при температуре 17 °C, если точка росы оказалась равной 5 °C.

2. За сколько времени испарится 1 *кг* воды в сосуде, если пространство над его поверхностью откачивается насосом, а температура воды поддерживается постоянной, равной 100 °C?

Площадь поверхности воды равна 0,01 $м^2$. Давление насыщенного пара воды при 100 °C равно 1 *бар*. Считать, что $\bar{v}_x = \sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}}$.

Н. Розов

Читатели советуют

В обширной редакционной почте «Кванта» есть довольно много писем, в которых содержатся разнообразные предложения, замечания, наблюдения, близкие к тематике «Практикума абитуриента». На письма, посвященные частным вопросам, редакция отвечает лично их авторам. Но с содержанием некоторых писем, на наш взгляд, полезно познакомиться всем читателям «Кванта». Хотя приводимые в этих письмах сообщения не всегда новы и оригинальны, они могут представить интерес для поступающих. Не считая возможным публиковать такие письма целиком, редакция решила подготовить подборку материалов, составленную по предложениям читателей, с необходимыми дополнительными комментариями.

В ряде писем читатели рекомендуют познакомить абитуриентов с одним любопытным приемом решения уравнений с параметром.

Прежде чем пояснить сущность этого приема, рассмотрим такую задачу.

Пример 1. *Разложить на множители многочлен*

$$P = 4x^4 - x^2y^2 + 2x^2y - x^2 + 2xy - 2x - 1.$$

На первый взгляд многочлен кажется довольно сложным. Но если заметить, что старшая степень y равна двум, и корни квадратного относительно y уравнения

$$-x^2y^2 + 2(x^2 + x)y + (4x^4 - x^2 - 2x - 1) = 0$$

легко находятся:

$$y_{1,2} = \frac{-(x^2 + x) \pm 2x^3}{-x^2} = \frac{x+1}{x} \pm 2x,$$

получаем

$$P = -x^2(y - y_1)(y - y_2) = (2x^2 + x + 1 - xy)(2x^2 - x - 1 + xy).$$

Пусть теперь надо решить уравнение относительно x с параметром a:

$$f(x, a) = 0, \qquad (1)$$

причем $f(x, a)$ — некоторый многочлен от переменных x и a. Предположим, что непосредственное решение уравнения (1) относительно x затруднительно (скажем, уравнение (1) — кубическое относительно x и т. п.). Если в то же время левая часть уравнения (1) представляет собой квадратный трехчлен относительно a, то, найдя корни этого трехчлена

$$a_1 = f_1(x), \ a_2 = f_2(x),$$

перепишем уравнение в виде

$$(a - f_1(x))(a - f_2(x)) = 0.$$

Тем самым уравнение (1) распадается на два уравнения:

$$f_1(x) = a, \ f_2(x) = a.$$

Наш читатель *М. Л. Крайзман* (Львов) приводит в своем письме несколько уравнений, которые удается решить указанным приемом.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0.$$

Заметив, что левая часть этого уравнения (четвертой степени) представляет собой квадратный трехчлен относительно a:

$$a^2 - 2a(x^2 - 5x - 1) + (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = 0,$$

и вычислив корни написанного квадратного трехчлена, получим два квадратных относительно x уравнения

$$x^2 - 6x - a = 0,$$
$$x^2 - 4x - a - 2 = 0.$$

Отсюда без особого труда получается окончательный ответ:

при $a \in]-\infty;\ 9[$ корней нет;
при $a = -9$ один корень: $x = 3$;
при $a \in]-9;\ -6[$ два корня: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+a}$;

при $a = -6$ три корня: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$, $x_3 = 2$;

при $a \in]-6;\ -5[\cup]-5;\ \infty[$ четыре корня: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+a}$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{6+a}$;

при $a = -5$ три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Изложенный прием можно применять и в случае, когда рассматриваемое уравнение приводится к виду (1) после ряда преобразований. При этом, конечно, нужно следить за тем, чтобы не потерять корни и не приобрести посторонние решения, что требует особой аккуратности в связи с наличием в уравнении параметра.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$x^2-\sqrt{a-x}=a.$$

Переписав данное уравнение в виде $x^2-a=\sqrt{a-x}$, немедленно заключаем *), что мы должны решить уравнение

$$(x^2-a)^2=a-x \qquad (2)$$

и отобрать те его корни, которые удовлетворяют неравенству

$$x^2-a\geqslant 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) можно рассматривать как квадратное относительно a:

$$a^2-a\,(2x^2+1)+(x^4+x)=0,$$

откуда $a=x^2+x$ или $a=x^2-x+1$.

Уравнение

$$x^2+x-a=0 \qquad (4)$$

имеет корни при $a\in[-1/4;\ \infty[$:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2},$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

причем $x_1=x_2$ при $a=-1/4$. Поскольку для корней $x_{1,2}$ в силу равенства (4) имеем

$$x^2-a=-x,$$

то проверка неравенства (3) сводится к проверке неравенства $-x\geqslant 0$, которое для x_1 справедливо для всех $a\in[-1/4;\ \infty[$, а для x_2 выполнено лишь при $a\in[-1/4;\ 0]$.

Уравнение

$$x^2-x+1-a=0 \qquad (5)$$

имеет корни при $a\in[3/4;\ \infty[$:

$$x_3=\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2},$$

$$x_4=\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2},$$

причем $x_3=x_4$ при $a=3/4$. Поскольку для корней $x_{3,4}$ в силу равенства (5) имеем

$$x^2-a=x-1,$$

то проверка неравенства (3) сводится к проверке неравенства $x-1\geqslant 0$, которое для x_3 неверно при любых a, а для x_4 выполнено при $a\in[1;\ \infty[$.

Подведя итог, запишем ответ:

при $a\in]-\infty;\ -1/4[$ корней нет;

при $a=-1/4$ один корень: $x=-1/2$;

при $a\in]-1/4;\ 0]$ два корня: $x=x_1$, $x=x_2$;

при $a\in]0;\ 1[$ один корень: $x=x_1$;

при $a\in[1,\ \infty[$ два корня: $x=x_1$, $x=x_4$.

В следующей задаче тот же прием с успехом применяется для решения системы уравнений.

Пример 4. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} ax^2+2by=a,\\ by^2+2ax=b.\end{cases}$$

Ясно, что если $a=b=0$, то любая пара чисел $(x,\ y)$ удовлетворяет системе. Если $b=0$, но $a\neq 0$ или если $a=0$, но $b\neq 0$, то система решений не имеет. Пусть, наконец, $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Тогда, выразив y из первого уравнения системы и подставив во второе, получаем уравнение четвертой степени относительно x с двумя параметрами a и b, которое можно рассматривать как квадратное относительно b:

$$4b^2-2b\cdot 4ax-a^2(1-x^2)^2=0.$$

Отсюда находим два уравнения:

$$b=\frac{a\,(1+x)^2}{2},\quad b=-\frac{a\,(1-x)^2}{2}.$$

Поучительную задачу прислали в своем письме наши читатели *А. М. Авоян* и *В. М. Анумян* (Ереван). Оказывается, что рассматриваемым приемом иногда удается решать и такие уравнения, в которых никакого параметра нет.

Пример 5. *Решить уравнение*

$$x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3. \qquad (6)$$

Последовательное возведение обеих частей уравнения в квадрат приводит к уравнению четвертой степени, решить которое очень трудно. Поэтому поступим следующим образом.

*) См., например, Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М., «Наука», 1976, с. 176—177).

Нетрудно сообразить, что корнями уравнения (6) будут те и только те корни уравнения

$$3+\sqrt{x}=(3-x)^2, \qquad (7)$$

которые удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x \leqslant 3$, то есть $x \in [0;\ 3]$. Рассмотрим вместо уравнения (7) более общее уравнение с параметром

$$a+\sqrt{x}=(a-x)^2, \qquad (8)$$

совпадающее с уравнением (7) при $a=3$. Записав уравнение (8) как квадратное относительно a:

$$a^2-a(2x+1)+(x^2-\sqrt{x})=0,$$

легко получим два уравнения:

$$x+\sqrt{x}+1-a=0,\quad x-\sqrt{x}-a=0,$$

или, полагая $a=3$,

$$x+\sqrt{x}-2=0,\quad x-\sqrt{x}-3=0.$$

Решив эти уравнения и отобрав те их корни, которые удовлетворяют условию $x \in [0;\ 3]$, найдем корень уравнения (6): $x=1$.

Упражнения

1. Разложить на множители следующие многочлены:

а) $(1+x^2)\,y^2+2(x-y)(1+xy)+1$;

б) $(x^2-1)^2+(y+1)(4x-y-1)$.

2. Решить уравнения

а) $x^6+(c^2-b^2)\,x^2-bc^2=0$;

б) $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$;

в) $x^3+2\sqrt{3}\,x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$;

г) $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=bx+cy-az,\\ y^2+z^2=ay+bz-cx,\\ z^2+x^2=cz+ax-by. \end{cases}$$

Наш читатель *Г. Ф. Пискарев* (с. Прозорово Ярославской области) прислал в редакцию неравенство, для доказательства которого необходимо вспомнить изучаемое в школе соотношение между тангенсом и его аргументом.

4. Доказать, что при $0<x<\pi/2$

$$\operatorname{tg} x-\sin x>\frac{x^3}{2}.$$

* * *

Свое письмо в редакцию наш читатель *Б. Я. Старобин* (г. Северодонецк Ворошиловградской области) посвятил подробному анализу одной геометрической задачи, предложенной Заочной физико-технической школой при МФТИ (задание № 5 для учащихся девятых классов).

Пример 6. *Стороны AB и CD выпуклого плоского четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и являются диаметрами двух конгруэнтных касающихся друг друга внешним образом окружностей радиуса r. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $|BC|:|AD|=1:3$.*

Казалось бы, в этой задаче нет ничего особенного, каждый решал много таких задач. Познакомимся с решением, которое предлагают авторы задания ЗФТШ.

Используя обозначения, очевидные из чертежа (см. рис. 1), и учитывая, что $(AO)\perp(OD)$, можем написать

$$S_{ABCD}=S_{AOD}-S_{BOC}=$$
$$=\frac{1}{2}(2r+x)(2r+y)-\frac{1}{2}xy=$$
$$=r(x+y)+2r^2.$$

Запишем теорему Пифагора для прямоугольных треугольников BOC, O_1OO_2, AOD:

$$x^2+y^2=z^2, \qquad (9)$$
$$(r+x)^2+(r+y)^2=4r^2, \qquad (10)$$
$$(2r+x)^2+(2r+y)^2=t^2. \qquad (11)$$

Из соотношений (9) и (10) следует равенство

$$r(x+y)=r^2-\frac{1}{2}z^2. \qquad (12)$$

С учетом условия $z:t=1:3$ и равен-

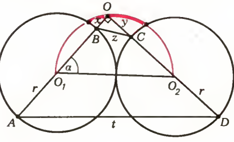


Рис. 1.

ства (12) из соотношений (9) и (11) легко исключить z и t:

$$x+y=\frac{2}{5}r. \qquad (13)$$

Поэтому окончательно $S_{ABCD}=\frac{12}{5}r^2$.

Ответ получен, в вычисленнях ошибки нет. Но любознательный абитуриент, захотевший найти x и y, будет немало удивлен. Ведь из равенств (9), (12) и (13) получается, что

$$x^2+y^2=\frac{6}{5}r^2,$$

а это уравнение с учетом уравнення (13) дает для величин x и y значения $\frac{1\pm\sqrt{14}}{5}r$, так что одна из длин x или y отрицательна!

В чем же причина столь парадоксального результата? Дело в том, что изображенная на чертеже геометрическая картина несовместнма с указанными в условии числовыми данными. Авторы задачи не заметили, что в ней речь идет о «невозможном объекте».

Чтобы убедиться в этом, найдем возможные значения величины $u=z/t$, совместимые с остальными геометрическими данными, указанными в условии задачн.

Поскольку O есть точка пересечения взанмно перпендикулярных прямых AB и CD, она лежит на полуокружности, имеющей отрезок O_1O_2 своим диаметром. Введем параметр $\alpha=\widehat{BO_1O_2}$. Тогда $x=|OO_1|-|BO_1|=2r\cos\alpha-r$, $y=2r\sin\alpha-r$, $z^2=x^2+y^2=6-4(\sin\alpha+\cos\alpha)$; аналогично $t^2=6+4(\sin\alpha+\cos\alpha)$, откуда

$$u^2=\frac{3-2(\sin\alpha+\cos\alpha)}{3+2(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{3-2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{3+2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)},$$

причем $\alpha\in[\pi/6;\pi/3]$, так как четырехугольник $ABCD$ — выпуклый. Легко видеть, что функция $u(\alpha)$ принимает наименьшее значение прн $\alpha=\pi/4$, а наибольшие — при $\alpha=\pi/3$ и $\alpha=\pi/6$, причем $u(\pi/4)=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ $u(\pi/6)=\frac{1}{\sqrt{11+6\sqrt{3}}}$, то есть приближенно $u\in]0,171;0,217[$.

Таким образом, при сформулированных в условии задачи геометрических предположениях *отношение* $\frac{|BC|}{|AD|}$ *не может принимать значения* 1/3.

Конечно, от поступающих в вузы не требуется (если не оговорено противное) проводить анализ условий существования предложенной в задаче геометрической конфигурации. Однако надо иметь в виду, что различные данные задачи могут быть тесно связаны между собой, зависимы, и тогда произвольно выбирать этн данные уже нельзя.

Упражнения

В следующих задачах проведите «решение», исходя из «естественного» чертежа, а затем покажите, что описанные геометрические конфигурацнн невозможны.

5. Стороны параллелограмма равны 1 *см* н 0,5 *см*, а угол между днагоналями 60°. Найти площадь параллелограмма.

6. Сторона треугольника равна 12 *см*, а высота, проведенная к этой стороне, 10 *см*. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 *см* (см. «Сборник задач по математнке для конкурсных экзаменов во втузы» под ред. М. И. Скаиавн, М., «Высшая школа», 1972, задача 10.260).

7. Дан круг с центром O. Через точку внутри круга проведены днаметр AB и хорда CD. Из точкн D опущен перпендикуляр DF на хорду AC (точка F лежнт между точками A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на днаметр AB. Точка M — середина хорды CD. Известно, что $|AM|=2|MO|$, $8|AH|=5|AB|$. Найти $\widehat{AMO}$.

* *
*

Задача ученика 8 класса *Р. Азизяна* (пос. Разина Азербайджанской ССР) не сложная. Поэтому не торопитесь составлять уравнение — сначала попытайтесь найти ответ без вычислений. Если ничего не получится — решите задачу и подумайте, привлекая физические представления, почему ответ действительно очевиден. Объясните также, почему ответ не зависит от того, какая из двух величин v_1 и v_2 больше.

8. Два велосипедиста одновременно приняли старт в пункте A и должны финишировать в пункте B. Первый велосипедист первую половину времени движения до финиша едет равномерно со скоростью v_1, а вторую половину своего времени движения до фи-

ниша — равномерно со скоростью v_2. Второй велосипедист первую половину пути до финиша едет равномерно со скоростью v_2, а вторую половину пути до финиша — равномерно со скоростью v_1. Кто финиширует раньше?

* *
*

Введение понятия производной в школьный курс математики дает учащимся возможность проводить подробный анализ широкого класса функций, в частности, довольно быстро и единообразно решать задачи «на наибольшее или наименьшее значение», даже геометрические. Один пример такой задачи прислал в редакцию наш читатель *Э. Г. Готман* (г. Арзамас Горьковской области).

Пример 7. *Основанием пирамиды служит ромб, длина стороны которого равна a. Известно, что длины высот, опущенных из вершины пирамиды на две противоположные стороны основания, равны h. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?*

Пусть $NABCD$ — данная пирамида, $[NL]$ и $[NM]$ — высоты граней ABN и CDN, $[NO]$ — высота равнобедренного треугольника LNM (рис. 2). Тогда $(AB)\perp(NL)$ и $(AB)\perp(NM)$, следовательно, $(AB)\perp(LM)$ и $(AB)\perp(NO)$. Поэтому $[LM]$ — высота ромба $ABCD$, а $[NO]$ — высота пирамиды.

Согласно условию $|AB|=a$, $|NL|=|MN|=h$. Положим $|LM|=2|LO|=x$, тогда $S_{ABCD}=ax$, $|NO|=\sqrt{h^2-\frac{x^2}{4}}$, а объем V пирамиды равен

$$V(x)=\frac{1}{6}a\sqrt{(4h^2-x^2)x^2}.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения на отрезке $[0; a]$ функции V, которого она достигает одновременно с функцией

$$f(x)=-x^4+4h^2x^2.$$

Так как $f'(x)=-4x^3+8h^2x$, то, приравняв производную нулю, получим уравнение

$$x(x^2-2h^2)=0$$

для критических точек, из которых

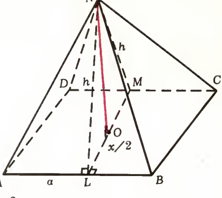


Рис. 2.

нас может интересовать только $x=h\sqrt{2}$.

Точка $h\sqrt{2}$ принадлежит промежутку $[0; a]$ в том и только в том случае, когда $a\geqslant h\sqrt{2}$. Будем сначала считать, что это условие выполнено. Сравнивая значение функции $f(x)$ в найденной точке и в концах промежутка $[0; a]$, заключаем, что функция $f(x)$ принимает наибольшее значение при $x=h\sqrt{2}$. Следовательно, если $a\geqslant h\sqrt{2}$, то $V_{\max}=\frac{1}{3}ah^2$.

Пусть теперь $a<h\sqrt{2}$, так что точка $x=h\sqrt{2}$ лежит вне промежутка $[0; a]$. Поскольку на отрезке $[0; h\sqrt{2}]$ функция $f(x)$ — возрастающая, то свое наибольшее значение она принимает в конце промежутка — при $x=a$. Следовательно, если $a<h\sqrt{2}$, то

$$V_{\max}=\frac{1}{6}a^2\sqrt{4h^2-a^2}.$$

Окончательный ответ выглядит так:

$$V_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{3}ah^2, \text{ если } a\geqslant h\sqrt{2};\\ \frac{1}{6}a^2\sqrt{4h^2-a^2}, \text{ если } a<h\sqrt{2}.\end{cases}$$

Упражнения

9 (МГУ, мехмат, 1966). Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 $см^2$. Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна равняться 20 *см*. При каких размерах коробки ее полная поверхность будет наибольшей?

10 (МГУ, физфак, 1971). Из прямоугольника, длина большей стороны которого равна l, вырезаются два полукруга, диаметрами которых служат меньшие стороны прямоугольника. При каком значении длины меньшей стороны прямоугольника площадь оставшейся части будет максимальной?

* *
*

Вниманию читателей журнала было предложено уравнение

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}-5x=0$$

(см. «Квант», 1976, № 4, с. 43). Опубликованное решение этого уравнения (см. «Квант», 1976, № 5, с. 79) использовало некоторую специальную замену неизвестного.

В своем письме в редакцию школьница *Н. Кириллова* (г. Чкаловск Таджикской ССР) указывает иной путь решения. Переписав уравнение в виде

$$x^4+4-5x^3+10x=0,$$

она после удачной группировки членов раскладывает левую часть на множители:

$$(x^4-4x^2+4)+4x^2-5x(x^2-2)=0,$$
$$(x^2-2)^2-x(x^2-2)+4x^2-4x(x^2-2)=0,$$
$$(x^2-2)(x^2-2-x)+4x(x-x^2+2)=0,$$
$$(x^2-x-2)(x^2-4x-2)=0.$$

В результате находятся корни уравнения:

$$x_1=-1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=2\pm\sqrt{6}.$$

* *
*

Некоторые геометрические факты, прямо не формулируемые в школьных учебниках как теоремы, оказываются иногда очень полезными при решении конкурсных задач. Конечно, любую задачу для поступающих можно решить и без всяких «дополнительных» фактов. Однако такого рода факты часто позволяют быстрее «увидеть» решение и прийти к цели наиболее простым путем, поэтому их стоит запомнить. На один из таких фактов обращает внимание абитуриентов наш читатель *П. И. Горнштейн* (Киев). Рассмотрим следующую задачу (см. «Геометрия 7», 1975, с. 155).

Пример 8. *Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что суммы квадратов длин двух его противоположных сторон равны.*

Эта задача довольно проста — ее решение легко получается с помощью теоремы Пифагора. Мы сейчас увидим, что знание этого свойства четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями позволяет весьма экономно решить целый ряд задач, предлагавшихся на конкурсных экзаменах.

Пример 9. (МГУ, мехмат, 1971). *В четырехугольник ABCD можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной оркружности равен R и $|AB|=2|BC|$.*

Пусть $|BC|=x$, $|CD|=y$ (рис. 3); тогда $|AB|=2x$. Так как в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $|AB|+|CD|=|BC|+|AD|$, откуда $|AD|=x+y$. По свойству четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями можем записать: $x^2+(x+y)^2=4x^2+y^2$, откуда $x=y$. Теперь можно показать, что диагональ AC является диаметром круга, описанного около четырехугольника $ABCD$ (убедитесь в этом!), поэтому из прямоугольного треугольника ABC имеем $x^2+4x^2=4R^2$, $x^2=\frac{4}{5}R^2$, а тогда

$$S_{ABCD}=2S_{ABC}=2x^2=8R^2/5.$$

Удачно воспользовавшись свойством четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями, мы очень быстро получили ответ. Попыт-

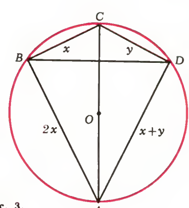


Рис. 3.

ка решить эту задачу применением тригонометрии приводит к сложным и громоздким вычислениям.

Пример 10. (МГУ, биофак, 1973). *Около четырехугольника $ABCD$ можно описать и в него можно вписать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны, $|AB|=|CD|$, радиус вписанной окружности равен 1. Чему равна площадь четырехугольника?*

Пусть $|AB|=|CD|=x$, $|BC|=y$; тогда $|AD|=2x-y$ (почему?). По свойству четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями $x^2+x^2=y^2+(2x-y)^2$, откуда $x=y$. Теперь легко доказать, что $ABCD$ — квадрат, $S_{ABCD}=4$.

Упражнения

11 (МГУ, мехмат, 1973). В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD. Известно, что $[AM]\perp[DK]$, $[CK]\perp[BM]$, $\widehat{CKD}=60°$. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

12. Найти отношения длин сторон выпуклого четырехугольника, имеющего угол $\pi/3$, если этот четырехугольник описан около окружности и имеет конгруэнтные и взаимно перпендикулярные диагонали.

13 (НГУ). В круге взяты две перпендикулярные хорды. Доказать, что квадрат диаметра круга равен сумме квадратов длин четырех отрезков, на которые данные хорды делятся точкой их пересечения.

* * *

Ученик 10 класса *Г. Панаитов* (с. Конгаз Молдавской ССР) предлагает читателям журнала решить следующую придуманную им задачу.

14. Высота четырехугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения взаимно перпендикулярных диагоналей основания $ABCD$. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ASC равна 300 *см*², а $|BD|=10$ *см*.

* * *

Обратимся в заключение к одной хорошо известной задаче, предлагавшейся и на вступительных экзаменах в вузы.

Пример 11. *Дан угол XAY, меньший развернутого, и точка O внутри него. Через эту точку проведена прямая l, пересекающая стороны угла в точках B и C. Найти такое положение прямой l, при котором треугольник ABC имеет наименьшую площадь.*

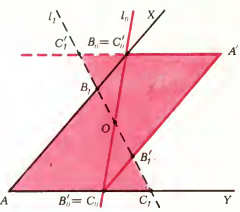


Рис. 4.

Решение этой задачи, основанное на вычислении площади треугольника ABC, приводится, например, в книге В. Б. Лидского и др. «Задачи по элементарной математике» (М., «Наука», 1967, с. 67, 293). В своем письме в редакцию *Б. В. Ванин* (Москва) указывает два чисто геометрических решения задачи, не использующих никаких вычислений. Познакомим читателей журнала с одним из этих решений.

Пусть l — некоторое положение секущей. Отразим отсекаемый треугольник ABC относительно точки O, получим треугольник $A'B'C'$. Если секущая l_0 такова, что ее отрезок B_0C_0 делится точкой O пополам (рис. 4), то объединение треугольников AB_0C_0 и $A'B_0'C_0'$ образует параллелограмм $AB_0A'C_0$, площадь которого вдвое больше площади треугольника AB_0C_0. Для любой другой секущей l_1 объединение треугольников AB_1C_1 и $A'B_1'C_1'$ образует многоугольник, площадь которого также вдвое больше площади треугольника AB_1C_1, но упомянутый параллелограмм содержится в этом многоугольнике (докажите!), а потому его площадь меньше. Следовательно, площадь треугольника ABC наименьшая, когда $[A'B]\parallel[AY)$, $[A'C]\parallel[AX)$.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1976 году

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

О Ленинградском государственном университете подробно было рассказано в «Кванте» № 6 за 1975 год и № 4 за 1976 год. В этом номере мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике на различных факультетах ЛГУ в 1976 году.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики - процессов управления

1. В кибернетическое устройство сначала вводится p *бит* некоторой информации (*бит* — единица количества информации), затем эта информация перерабатывается кибернетическим устройством по заданной программе, а потом полученная новая информация выдается на печатающее устройство. Определить наименьшую из возможных продолжительностей работы кибернетического устройства по приему, переработке и выдаче информации, если известно, что скорость переработки информации равна c *бит/сек* и в 3 раза меньше суммы скоростей ввода и выдачи информации, а количества информации на входе и выходе одинаковы.

2. Решить неравенство
$$\sqrt{2\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)}>\frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}$$
при всех значениях параметра a.

3. Решить уравнение
$$\sin x+\sqrt{\sin x+\sin 2x-\cos x}=\cos x.$$

4. Дан равносторонний треугольник ABC со сторонами длины a. На сторонах AB, BC и CA отложены равной длины отрезки AA', BB' и CC' по направлениям AB, BC и CA так, что площадь треугольника $A'B'C'$ в k раз меньше площади треугольника ABC. Найти длины указанных отрезков.

5. Дана окружность радиуса R с центром в точке O и ее диаметр AB. Через точку P, лежащую между O и A, проведена хорда CD, перпендикулярная диаметру AB. Известно, что сумма площадей поверхности, полученной вращением радиуса OC вокруг диаметра, и шарового сегмента, полученного вращением дуги AC, равна площади шарового сегмента, полученного вращением дуги CB. Найти $|OP|$.

Физический факультет

1. Лунная тележка приближается к обрыву, причем в начальный момент времени ее скорость равна v, ускорение a $(a\geqslant 0)$, расстояние до обрыва S (считая по прямой, по которой движется тележка). Через какое время, считая от начального момента, надо подать команду с Земли на включение тормозов (при этом ускорение тележки становится равным a_1), чтобы тележка остановилась на краю обрыва? Расстояние от Земли до Луны равно L, скорость распространения радиосигнала c.

2. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDH$, длина стороны основания которой равна a, бокового ребра b, проведена плоскость параллельно диагонали основания AC и ребру DH. Найти максимальную из возможных площадей фигуры, получающейся в сечении пирамиды этой плоскостью.

3. Найти корни уравнения
$$2(\sin x-\cos x+1)\times\left(2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x\cdot\operatorname{tg}x-1\right)+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0,$$
лежащие в интервале $|x|<10$.

4. Решить неравенство
$$\log_{x+2}(x^2-2x+p)\geqslant 2$$
при всех значениях параметра p.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1,\\ xy^2+\dfrac{1}{x^2y}=1+\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

Химический, психологический и экономический факультеты

1. В начальный момент использования гальванического элемента один из внутренних электродов содержал 20 *г* чистой ртути. В результате восстановления в течение первых суток увеличение чистой ртути было на 5% меньше по сравнению с процентным увеличением в течение вторых суток. Определить процентное увеличение чистой ртути в течение первых суток, если известно, что в течение вторых суток количество чистой ртути увеличилось на 1,648 *г*.

2. Решить неравенство
$$\log_a(x-1)+\log_a x>2.$$

3. Решить уравнение
$$\frac{\sin 2x}{2}=\frac{\sin^3 x+3\cos^3 x}{\sin x+3\cos x}.$$

4. Дан треугольник ABC со сторонами $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$. Через точку D, лежащую на стороне AB, проведены прямые, параллельные сторонам BC и AC; E и F — точки пересечения этих прямых со сторонами AC и BC. Известно, что $|DE|=|DF|$. Найти $|AD|$.

5. Даны шар радиуса R и секущая плоскость. Известно, что площадь полной поверхности меньшей части шара, отсекаемой данной плоскостью, в k раз меньше площади поверхности шара. Определить расстояние от центра шара до данной секущей плоскости.

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. Желая попасть в пункт B в нужное время, автомобилист выехал из пункта A со скоростью 64 *км/час*. В течение трех часов он ехал с этой скоростью. Затем «пробка» на дороге заставила его остановиться. Простояв 50 минут, автомобилист решил проехать в пункт B объездным путем, поэтому его путь увеличился на 31 *км*. В результате он приехал в пункт B с опозданием на 1 *час* 5 *мин*, хотя и ехал вторую часть пути со скоростью на 6 *км/час* большей, чем сначала. Найти кратчайшее расстояние между пунктами A и B по той дороге, по которой автомобилист хотел попасть в пункт B.

2. Решить уравнение

$$16^{\cos 2x} = 6\cdot 4^{-2\sin^2 x} + 1.$$

3. Решить неравенство

$$3x + \sqrt{5x-1} < 1.$$

4. Решить уравнение

$$\log_{(x+1)}(1-3x) = -1 + \log_{\sqrt{1-3x}}(1-2x-3x^2).$$

5. В прямоугольном треугольнике один острый угол вдвое больше другого острого угла, а сумма длин катетов равна l. Найти площадь треугольника.

Биолого-почвенный и географический факультеты

1. Бригада выполнила план работы на 98%. Увеличение производительности труда каждого рабочего на 1/20 планового объема работы всей бригады позволило, освободив трех человек для выполнения других заданий, выполнить работу на 132%. Сколько человек было в бригаде?

2. Решить неравенство

$$\log_a x > \sqrt{\frac{6}{(\log_a x - 1)\log_x a}}.$$

3а (Только для биолого-почвенного факультета). Решить уравнение

$$\cos 3x\cdot\sin^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin 3x\cdot\cos^3\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{8}.$$

3б (Только для географического факультета). Решить уравнение

$$\frac{2(\cos^3 x - \cos 3x)}{3\sin x} = 1 + 5\cos 2x.$$

4. В равнобедренный треугольник ABC, у которого $|AB| = |AC|$, $\widehat{A} = \alpha$, а площадь равна S, вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найти наименьшее из расстояний от вершины A до вершин квадрата.

5. Основанием призмы является квадрат со стороной длины a, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под острым углом α, причем проекция одного из них содержит диагональ квадрата. Из вершины квадрата, для которой проходящее через нее ребро и диагональ квадрата образуют острый угол, параллельно другой диагонали проведена секущая плоскость под углом β к плоскости основания. Найти площадь сечения в предположении, что сечение не пересекает верхнее основание.

В. Осипов, А. Шепелявый

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте», 1973, № 7 мы рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1976 году.

Математика

Математико-механический факультет

1. При каком значении параметра m корни x_1, x_2 уравнения $mx^2 + x + m = 0$ вещественны, различны и удовлетворяют неравенству $|x_1 - x_2| + (x_1x_2)^m + x_1 + x_2 \leqslant 0$?

2. У параллелепипеда все грани — ромбы со сторонами a и острым углом α. Найти объем этого параллелепипеда.

3. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям: $\cos x - \cos 11x = 0$, $\cos 2x + \sin 3x = 1$, $|x| < 3$.

4. Решить уравнение

$$(\log_{\operatorname{tg} x}\cos x + 2)\log_{\operatorname{tg} x}\cos x = 2 - \log_{\operatorname{ctg} x}\cos x.$$

Физический факультет

1. К звезде X послан с Земли космический аппарат A, а через 12 лет — аппарат B. Оба аппарата достигли цели и, не останавливаясь, направились к Земле. Аппарат B вернулся на 8 лет раньше A. Через сколько лет после запуска A эти аппараты встретились, если в момент, когда A достиг X, B прошел 9/10 своего пути к X? Скорости аппаратов и расстояние до звезды считать постоянными.

2. Основание прямоугольного параллелепипеда вписано в круг радиуса R. Одна

из сторон основания стягивает дугу окружности величины 2α. Найти объем этого параллелепипеда, зная его боковую поверхность S.

3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(2^{-x}-2^{x})-\log_{3}(1-2^{x+1}+4^{x})<2.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$$

Физика

Математико-механический факультет

1. За какое время t тяжелое тело спустится с вершины наклонной плоскости высотой $h = 2$ *м* и углом при основании $\alpha = 45°$, если предельный угол, при котором тело может покоиться на этой плоскости, $\beta = 30°$?

2. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 0{,}1$ включена в сеть с напряжением $U_1 = 120$ *в*. Сопротивление вторичной обмотки $r_2 = 1{,}2$ *ом*. Определить напряжение на вторичной обмотке при токе нагрузки $I_н = 5$ *а*. Потерями в первичной обмотке трансформатора пренебречь.

3. К батарее через переменное сопротивление R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, то показание вольтметра возрастет вдвое. Во сколько раз изменится показание вольтметра, если R уменьшить до нуля? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. Точечный источник света находится на оси вогнутого сферического зеркала. Расстояние между источником и оптическим центром зеркала равно d, а между источником и его изображением L. Определить радиус кривизны зеркала.

Физический факультет

1. Планета представляет собой однородный шар плотностью ρ. Каков период обращения искусственного спутника, движущегося вблизи ее поверхности?

2. При изотермическом сжатии газа уменьшение объема на 1 *л* сопровождается увеличением давления на 20%. На сколько процентов увеличится давление этого же количества газа, если объем уменьшить на 2 *л*?

3. Чему равен диаметр d изображения Солнца в зеркальном шарике диаметром $a = 0{,}4$ *см*? Диаметр Солнца $D = 1{,}4\cdot10^{9}$ *м*, а расстояние до него $L = 1{,}5\cdot10^{11}$ *м*.

4. Столб вертикально вбит в дно реки глубиной $h_1 = 2$ *м*. Часть столба высотой $h_2 = 1$ *м* возвышается над водой. Найти длину тени столба на дне реки, если высота Солнца над горизонтом 45°. Принять приближенно $n_{воды} = \sqrt{2}$.

Э. Голубов

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Хозяйственная деятельность человека теснейшим образом связана с природными особенностями Земли, поэтому всем нужны хорошие карты. По карте можно в короткое время ознакомиться с интересующим нас районом, с его ландшафтом, размещением природных месторождений и промышленных объектов. Велика роль карт и в обороне страны.

Но создать хорошую карту нелегко. Создание карт тесно связано с рядом специальных наук, в первую очередь с геодезией, аэрофотосъемкой и картографией. Ныне эти науки немыслимы без современных приборов. Исследования космического пространства и глубин океана выполняются приборами, основной частью которых являются оптические средства обработки информации, работающие как в видимой для глаза области спектра, так и в невидимой. В связи с этим важную роль играет оптическое приборостроение, в задачу которого входит разработка, проектирование и изготовление высокоточных оптических приборов, аэрофотоаппаратов, оптических и лазерных дальномеров, гироскопических приборов для определения направления истинного меридиана и др.

Специалистов для нужд картографии готовит один из старейших вузов страны — Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. Он был основан 14 мая 1779 года, когда при Московской межевой канцелярии была основана Землемерная школа, переименованная в 1819 году в Константиновское землемерное училище. В 1835 году училище было переименовано в Константиновский межевой институт, первым директором которого был русский писатель Сергей Тимофеевич Аксаков.

В настоящее время в составе института имеются следующие факультеты: геодезический по специальностям астрономо-геодезия (специализация: морская геодезия), прикладная геодезия, космическая геодезия; аэрофотогеодезический со специальностью аэрофотогеодезия; картографический со специальностью картография (специализации: проектирование и составление карт, издание карт); оптико-механический, готовящий специалистов широкого профиля по оптическим и оптико-электронным приборам; заочный факультет со специальностями прикладная геодезия, аэрофотогеодезия, картография; вечерний оптико-механический факультет.

Учебный процесс в институте предусматривает наряду с лекциями большое число лабораторных, практических и семинарских занятий; значительное место отведено учеб-

ной и производственной практике на геополигонах института.

Окончившие институт получают квалификацию инженеров соответствующей специальности и работают на предприятиях ГУГК, на картографических фабриках, в проектных и научно-исследовательских организациях.

В институте действует подготовительное отделение, очные и заочные подготовительные курсы. Кроме этого, для всех абитуриентов ежегодно с 1 июля по 1 августа организуются бесплатные подготовительные курсы.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в МИИГАиКе в 1976 году.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

2. Решить уравнение

$$9^{1/x} = 6^{1/x} + 2\cdot 4^{1/x}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/3} [(x+3)(x-5)] > -2.$$

4. Отношение площади боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти величину угла между боковым ребром и высотой пирамиды.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}.$$

2. Решить уравнение

$$7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3\cdot 5^{\lg x-1} - 13\cdot 7^{\lg x-1}.$$

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} < 3^{-x}.$$

4. Найти отношение площади поверхности и объема шара соответственно к площади полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним треугольником в осевом сечении.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x).$$

3. Решить неравенство

$$3^{2x+5} \leqslant 3^{x+2} + 2.$$

4. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде даны: длина d диагонали, величина α двугранного угла при нижнем основании и длина H высоты. Найти объем усеченной пирамиды.

Физика

1. Мотоциклист проехал 0,4 пути между двумя городами со скоростью 72 *км/час*, а оставшуюся часть пути — со скоростью 54 *км/час*. Определить среднюю скорость мотоциклиста.

2. Свободно падающее тело прошло последние 10 *м* за 0,25 *сек*. Определить высоту падения и скорость в последний момент падения.

3. Определить натяжение троса при равноускоренном опускании кабины лифта массой 400 *кг*, если за 10 *сек* она прошла расстояние 30 *м*.

4. В море плавает льдина, часть которой объемом 195 $м^3$ находится над водой. Определить объем всей льдины и ее подводной части. Плотность льда 0,9 $г/см^3$, плотность морской воды 1,03 $г/см^3$.

5. Пуля массой 9 *г*, летящая горизонтально со скоростью 400 *м/сек*, пробивает бревно толщиной 30 *см* и вылетает из него со скоростью 100 *м/сек*. Какова средняя сила сопротивления движению пули в бревне?

6. Какова плотность азота при температуре 0 °С и давлении 10^5 $н/м^2$?

7. Определить скорость электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 300 *в*. Начальную скорость электрона принять равной нулю. Масса электрона $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг*, заряд $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*.

8. На столбе высотой 8 *м* подвешена электрическая лампочка, дающая полный световой поток 3768 *лм*. Определить освещенность поверхности земли у основания столба и на расстоянии 4 *м* от основания столба.

9. Предмет высотой $h = 5$ *см* находится на расстоянии $d = 12$ *см* от вогнутого зеркала с фокусным расстоянием 10 *см*. Где и какого размера получится изображение?

10. С какой скоростью вылетают электроны из поверхностного слоя цезия при освещении желтым светом с длиной волны $\lambda = 5{,}9\cdot 10^{-7}$ *м*, если работа выхода $A = 30{,}2\cdot 10^{-20}$ *дж*? Постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ *дж·сек*, масса электрона $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг*, скорость света в вакууме $c = 3\cdot 10^8$ *м/сек*.

М. Хорошев

Московский институт стали и сплавов

Московский институт стали и сплавов начал свое существование как металлургический факультет Московской горной академии, созданной по прямому указанию В. И. Ленина декретом Совета Народных Комиссаров от 4 сентября 1918 года. Сейчас Московский ордена Трудового Красного Знамени институт стали и сплавов является ведущим металлургическим и металловедческим вузом страны. В нем готовят инженерные и научные кадры для черной и цветной металлургии, а также для ряда новых отраслей науки и техники.

В нашем институте найдут себе специальность по душе все увлеченные математикой, физикой, химией, ибо металлургия сегодня самым тесным образом связана с этими фундаментальными науками. У нас готовят специалистов в области металлургии черных, цветных, редких, радиоактивных металлов, высокотемпературных материалов, алмазов и сверхтвердых сплавов, физики металлов, физико-химических методов исследований, полупроводниковой техники, экономики и кибернетики металлургических процессов.

Наибольший интерес у наших читателей вызывает физико-химический факультет. Расскажем о нем несколько подробнее.

Развитие техники предъявляет все более высокие и разнообразные требования к металлическим материалам. Например, необходимы сплавы, работающие при температурах, близких к абсолютному нулю и превышающих тысячи градусов, или магнитные сплавы, сильно намагничивающиеся или легко размагничивающиеся. В последнее время особую важность приобрели сверхпроводящие сплавы, уже сейчас применяемые для создания сильных магнитных полей, а в будущем — для передачи электрической энергии на далекие расстояния.

Для решения различных проблем, связанных с созданием и изучением новых материалов, нужны специалисты, обладающие знаниями как технологии, так и физики и математики на уровне выпускников физических факультетов университетов. Таких специалистов и готовит физико-химический факультет Московского института стали и сплавов (МИСиС).

Девять кафедр факультета руководят подготовкой инженеров по трем специальностям:

1) физика металлов (специализации: изучение электронной и атомной структуры металлов, металлофизика высокопрочных сплавов, прецизионные сплавы, сверхпроводящие материалы);

2) физико-химические исследования металлургических процессов (специализации: кибернетика металлургического производства, высокотемпературные материалы, коррозия и защита металлов, металлургия черных металлов, производство искусственных алмазов и сверхтвердых материалов);

3) металловедение, оборудование и технология термической обработки металлов.

В подготовке специалистов по физике металлов участвует Институт физики твердого тела АН СССР, где студенты ведут научно-исследовательскую работу и где им читается ряд специальных курсов.

Исследовательская работа студентов на кафедрах начинается с первых курсов, а с IV курса для участия в научно-исследовательской работе отводится специальное время в учебном расписании. При выполнении этой работы студенты овладевают методами современного эксперимента (ядерная спектроскопия, электронный парамагнитный резонанс, рентгеновский и электронно-оптический анализы, внутреннее трение, изучение механических, термодинамических и других свойств материалов в широком интервале температур и т. д.).

Выпускники физико-химического факультета направляются на работу в научно-исследовательские и проектные организации и в заводские лаборатории.

О высоком уровне математической подготовки наших студентов говорит их убедительная победа на VI Московской городской олимпиаде «Студент и научно-технический прогресс» (1-е место в подгруппе ведущих технических вузов г. Москвы).

Требования к поступающим на различные факультеты и специальности института различны. На технологических факультетах курс математики наиболее простой. На теоретических факультетах предъявляются повышенные требования по математике и физике. Уровень этих требований виден по приведенным ниже вариантам вступительных письменных экзаменов по математике на различных факультетах МИСиС и задачам из билетов устного экзамена по физике на физико-химическом факультете МИСиС 1976 года. В 1977 году примерно такие же варианты будут предложены абитуриентам, изучавшим математику по старой школьной программе. Задачи по новой школьной программе опубликованы в «Кванте» № 3 за 1977 год, а примерные варианты по новой программе публикуются ниже.

Математика, 1976 г.

Физико-химический факультет

1. Решить неравенство

$$\frac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|}>0.$$

2. При каком иррациональном значении x три числа

$$0{,}2727\ldots;\ x;\ 0{,}7272\ldots$$

могут составить прогрессию (арифметическую или геометрическую)? Найти x и сумму четырех членов этой прогрессии.

3. Решить уравнение

$$\cos 3x\cdot\operatorname{tg} 5x=\sin 7x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2^2(x+y)=1+\log_2^2 x-\log_2^2 y,\\ \log_2(x+y)=\log_2 x\cdot\log_2 y.\end{cases}$$

5. Шарик лежит на основании правильной треугольной пирамиды, касаясь основания в его центре. Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шарика. Найти радиус шарика, если высота пирамиды равна H, сторона основания пирамиды a.

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. Два тела движутся навстречу одно другому из двух мест, находящихся на расстоянии 153 *м*. Первое проходит по 10 *м* в секунду, а второе в первую секунду прошло 3 *м*, а в каждую следующую секунду на 5 *м* больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд тела встретятся?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{y} = 3xy, \\ y^2 + x = 5x^2y^2. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/3}(\log_4(x^2-5)) > 0.$$

4. Решить уравнение

$$\sin x - \sin x \cdot \cos 6x = 2.$$

5. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Определить объем конуса, если его полная поверхность равна S.

Факультет металлургии цветных, редких металлов и сплавов

1. Решить неравенство

$$\frac{27^x - 3^{2x+1} + 2\cdot 3^x}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\lg(x-30) + \lg\sqrt{x+30} = 1 + 2\lg 2.$$

3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех ее членов, стоящих на четных местах, в три раза меньше суммы всех ее членов, стоящих на нечетных местах, и сумма первых пяти членов этой прогрессии равна 484.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{3} + \sin 2x + 3\cos x}{1 + 2\sin x} = -\sqrt{3} + \cos x.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом β к плоскости основания проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, если апофема пирамиды равна l, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α.

Факультет полупроводниковых материалов и приборов

1. Решить уравнение

$$|x^2 + 2x - 1| = \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}.$$

2. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 3, а сумма их кубов равна 4. Найти эти числа.

3. Решить неравенство

$$x^2\log_2^2 x + (x+2)\log_2 x + 2x + 4 \geqslant$$
$$\geqslant (x+2)\log_2^2 x + x^2\log_2 x + 2x^2.$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = 1.$$

5. В шар радиуса R вписан правильный тетраэдр. Поворотом его на угол $\pi/3$ вокруг высоты получается новый тетраэдр, вписанный в шар. Найти объем части шара, внешней по отношению к обоим тетраэдрам.

Математика, 1977 г.

Вариант А предназначается абитуриентам физико-химического факультета и факультета полупроводниковых материалов и приборов, варианты Б, В — абитуриентам всех остальных факультетов.

Вариант А

1. Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt{4x - x^3} + \lg(x^2 - 1).$$

2. На отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ найти все решения уравнения

$$2\sin 5x \cdot \sin\frac{3}{2}x = \cos\frac{x}{2}.$$

3. Коэффициенты второго, третьего и четвертого членов разложения бинома $(a+b)^n$ составляют арифметическую прогрессию. Найти эти коэффициенты.

4. Равносторонний треугольник со стороной a вращается около внешней оси, параллельной стороне треугольника и отстоящей от нее на расстоянии, равном половине высоты треугольника. Найти объем тела вращения.

5. Криволинейная трапеция ограничена графиком функции $f(x)=x^2$ и прямыми $y=0$, $x=1$, $x=2$. В какой точке графика функции $f(x)=x^2$ следует провести к нему касательную, чтобы она отсекла от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

Вариант Б

1. Найти

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}.$$

2. Решить уравнение

$$\lg(3x-2) - 2 = \frac{1}{2}\lg(x+2) - \lg 50.$$

3. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \geqslant 0, \\ x - y \leqslant 0, \\ x - 4y + 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

4. Пусть α, β, γ — внутренние углы треугольника, причем справедливо равенство

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Доказать, что один из углов треугольника равен 120°.

5. Криволинейный треугольник ограничен графиком функции $y(x)=\sin x$ и прямыми $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку $O(0;0)$, чтобы эта прямая разбивала криволинейный треугольник на две равновеликие части?

Вариант В

1. Дана функция

$$f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}.$$

Найти ее область определения и показать, что

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y(x) = \sin 2x - x$ на отрезке $[0; \pi]$.

3. Найти n, если $A_n^5 = 18 A_{n-2}^4$, где A_n^k — число размещений из n элементов по k.

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма: A $(-3; -2; 0)$, B $(3; -3; 1)$ и C $(5; 0; 2)$. Найти его четвертую вершину D и угол между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

5. Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого равны 12, 10, 10. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найти объем пирамиды.

Физика

Физико-химический факультет

1. Шарик массой $m = 100$ *г* подвешен на нерастяжимой нити длиной $l = 1$ *м*. Определить энергию E маятника и скорость $|\vec{v}|$ шарика при прохождении положения равновесия, если наибольший угол отклонения маятника от вертикального направления $\alpha = 45°$.

2. Озеро имеет глубину $h = 18$ *м*. На дне температура воды $t_1 = 6$ °C, а на поверхности $t_2 = 19$ °C, атмосферное давление $p_0 = 760$ *мм рт. ст.* Пузырек воздуха, имеющий первоначально объем $V_1 = 1$ *мм*^{3}, медленно поднимается со дна. Чему будет равен его объем V_2 у поверхности воды?

3. Медный шар диаметром $d = 1$ *см* помещен в масло. Чему равен заряд q шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Напряженность электрического поля направлена вертикально вверх и $|\vec{E}| = 36\,000$ *в/см*. Плотность масла $\rho_1 = 800$ *кг/см*^{3}, меди $\rho_2 = 8600$ *кг/м*^{3}.

4. Тонкая стеклянная линза имеет в воздухе оптическую силу $D_1 = 5$ *дптр*. Показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}5$. Если эту линзу погрузить в жидкость с показателем преломления n_2, она действует как рассеивающая с фокусным расстоянием $F_2 = -90$ *см*. Определить n_2.

Н. Квачева, О. Малючков, В. Треногин

Московский институт электронного машиностроения

Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ) — один из самых молодых вузов Москвы. Его создание — следствие бурного развития радиоэлектроники, полупроводникового и электровакуумного приборостроения, вычислительной техники и математического обеспечения современных ЭВМ, потребовавшего большого числа специалистов, сочетающих глубокие инженерные знания с отличной физико-математической подготовкой.

МИЭМ имеет следующие факультеты: полупроводниковое и электровакуумное машиностроение, автоматика и вычислительная техника, радиотехника, прикладная математика, вечерний и два специальных факультета прикладной математики и автоматизированных систем управления.

МИЭМ имеет также подготовительное отделение, где занятия ведутся по дневной форме обучения. На подготовительном отделении учатся в течение 8 месяцев передовые рабочие и демобилизованные из рядов Советской Армии. Все слушатели подготовительного отделения получают такую же стипендию, как первокурсники, и при успешной сдаче выпускных экзаменов зачисляются на 1-й курс института без дополнительных экзаменов.

Характерной особенностью подготовки инженеров в МИЭМ является сочетание фундаментального и прикладного характера образования, предусматривающего высокую физико-математическую подготовку.

Естественно, это обстоятельство учитывается при отборе абитуриентов на вступительных экзаменах.

Ниже приводятся варианты вступительных письменных экзаменов по математике и задачи устного экзамена по физике в МИЭМ в 1976 году.

Математика

Вариант 1

1. ЭВМ должна решить две задачи. Первая состоит из 9 миллионов операций типа A и 16 миллионов операций типа B и требует 11 минут 40 секунд машинного времени. Вторая задача содержит вдвое больше операций типа A и вдвое меньше операций типа B, на ее решение машина тратит 13 минут 20 секунд. Сколько операций каждого типа может выполнить ЭВМ в секунду?

2. Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\sin x = \frac{9\sin x - 2\sin 3x - 9\sin 7x}{\cos^2 2x + 4\cos 4x}$$

и найти сумму его корней, лежащих в промежутке $]-12;\ 39[$.

3. Решить уравнение $(a > 0,\ b > 0)$:

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1.$$

4. Решить неравенство

$$\log_a (x-2) + \log_a x > 1.$$

5. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна c, а величина острого угла α. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол величины β. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

Вариант 2

1. При одновременной работе два трактора марки A и один трактор марки B могут вспахать поле площади 400 *га* за 10 суток. Один трактор марки B может вспахать это поле на $8^1/_3$ суток быстрее, чем один трактор марки A. За какое время могут вспахать поле в 960 *га* четыре трактора марки A и три трактора марки B?

2. Решить уравнение

$$\frac{3\sin 4x + 2\sin 2x}{3\cos 4x + 2\cos 2x + 3} + 2\,\mathrm{tg}\, x = 0$$

и найти сумму его корней, лежащих в промежутке $]-18;\ 53[$.

3. Решить неравенство $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \geqslant \frac{3}{2}$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\log_x \sqrt{a^3}}\cdot \log_a x + 1 = 0.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде, у которой высота длины H составляет с боковыми ребрами угол величины α, через диагональ основания проведена плоскость под углом β к основанию. Определить площадь сечения.

В. Тонян

Физика

1. Тело *1* бросают вертикально вверх с начальной скоростью $|\vec{v}_0| = 30$ *м/сек* (рис. 1). Тело *2*, находящееся на высоте $h = 40$ *м* над поверхностью Земли, бросают горизонтально со скоростью $|\vec{u}| = 20$ *м/сек*. С каким запаздыванием или опережением τ нужно бросить второе тело, чтобы тела столкнулись в воздухе, если $s = 20$ *м* и $|\vec{g}| = 10$ *м/сек*^{2}? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Два тела с массами $m_1 = 200$ *г* и $m_2 = 300$ *г*, движущиеся со скоростями $|\vec{v}_1| = 4$ *м/сек* и $|\vec{v}_2| = 3$ *м/сек*, направленными перпендикулярно друг другу, испытывают абсолютно неупругое соударение. После соударения они движутся как единое целое. На сколько градусов повысится температура этих тел, если их удельная теплоемкость одна и та же и равна $c = 0{,}03$ *кал/(г·град)*?

3. Два груза одинаковой массы, связанных невесомым стержнем, совершают колебания (рис. 2). Расстояние от точки подвеса O до одного из грузов $r = 10$ *см*, а до другого — $R = 30$ *см*. С какой угловой скоростью стержень проходит положение равновесия, если наибольший угол отклонения стержня от вертикали $\theta = 60°$?

4. В двух частях цилиндра, разделенных поршнем A, находятся разные массы m_1 и m_2 воздуха при одной и той же температуре (рис. 3). Правый конец цилиндра закрыт подвижным поршнем B. На сколько сместится поршень A, если поршень B передвинуть вправо на расстояние $b = 4$ *см*? При равновесии в цилиндре устанавливается первоначальная температура. Отношение масс $m_1/m_2 = 3$.

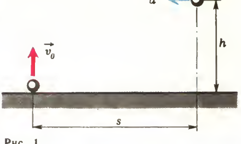


Рис. 1.

Рис. 2.

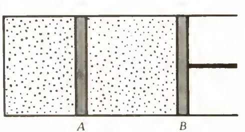


Рис. 3.

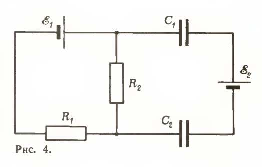


Рис. 4.

5. В вершины квадрата со стороной $a = 25$ *см* поместили 4 одноименных электрических заряда величиной $Q = 7 \cdot 10^{-9}$ *к* каждый и отпустили. С какими скоростями будут двигаться эти заряды, когда расстояние между ними удвоится? Массы всех зарядов одинаковы и равны $m = 5{,}41$ *г*.

6. Определить напряжение на конденсаторах емкостью $C_1 = 1$ *мкф* и $C_2 = 3$ *мкф* (рис. 4), если $\mathscr{E}_1 = 4$ *в*, $\mathscr{E}_2 = 10$ *в*, $R_1 = 100$ *ом* и $R_2 = 300$ *ом*. Внутренним сопротивлением источников можно пренебречь.

7. Электрон, движущийся со скоростью $|\vec{v}| = 10^7$ *м/сек*, влетает в однородное магнитное поле $|\vec{B}| = 2$ *тл* под углом $\alpha = 60°$ к линиям магнитной индукции. Определить шаг винтовой траектории электрона. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

8. При лобовом столкновении атома водорода, двигавшегося со скоростью $|\vec{v}_0| = 7 \cdot 10^4$ *м/сек*, с покоившимся атомом водорода был испущен световой квант с длиной волны $\lambda = 0{,}122$ *мкм*. Пренебрегая импульсом фотона, определить скорости атомов после столкновения. Масса атома водорода $m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*.

Г. Ефашкин

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт имени В. И. Ленина (МГПИ) является старейшим высшим педагогическим учебным заведением страны. Институт был создан на базе Высших женских курсов, организованных в Москве в 1872 году, и ныне является крупнейшим учебно-педагогическим и научно-исследовательским центром в системе народного образования.

На математическом факультете МГПИ имеется 7 кафедр: математического анализа, алгебры, геометрии, теории чисел, вычислительной математики и программирования, методики преподавания математики, физики. В течение пяти лет студенты изучают математический анализ, алгебру и теорию чисел, геометрию, вычислительную математику и программирование, теорию аналитических функций, уравнения математической физики, теорию вероятностей, математическую логику, общую физику и теоретическую механику, астрономию, методику преподавания математики, педагогику, психологию и целый ряд других специальных общеобразовательных и общественно-экономических дисциплин. Кроме того, студенты по своему выбору слушают специальные курсы по самым различным вопросам современной математики и участвуют в работе специальных математических и методических семинаров.

Мастерством преподавания математики в средней школе, умением передавать основы этой науки, свою любовь и увлеченность математикой следующему поколению студенты овладевают на занятиях по методике преподавания математики и на педагогической практике у лучших учителей московских школ.

В вычислительном центре математического факультета МГПИ студенты знакомятся с современной вычислительной техникой, приобретают навыки работы на самых совершенных электронно-вычислительных машинах. Большие возможности предоставляет факультет и для научной деятельности студентов. Научное студенческое общество привлекает студентов к научно-исследовательской работе по математике, по вопросам преподавания математики и программирования в средней школе. Лучшие работы студентов отмечаются на общеинститутских, городских и всесоюзных смотрах студенческих научных работ.

Физический факультет МГПИ готовит учителей физики для средней школы по специальности: физика и астрономия.

В составе факультета 6 кафедр: общей и экспериментальной физики, теоретической физики, физики твердого тела, методики преподавания физики, математической физики и общетехнических дисциплин.

Кроме основных курсов на всех кафедрах читаются разнообразные спецкурсы, организована работа в спецпрактикумах, научных кружках и проблемных лабораториях.

На факультете работает студенческое научное общество.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике на математическом и физическом факультетах МГПИ им. В. И. Ленина в 1976 году.

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. Две бригады колхозников должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, а потому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?

2. Решить уравнение

$$\sin 4x \cdot \cos x = \sin 3x \cdot \cos 2x.$$

3. Решить уравнение

$$5^{3 \lg x} = 12{,}5x.$$

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B и середины M и N ребер AD и CC_1 проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости грани $ABCD$.

5. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $|AB| = \frac{1}{2}|AD|$, $|BC| = \frac{1}{2}|CD|$. Зная, что $|AB| = a$, $|AC| = b$, вычислить $|BC|$.

Вариант 2

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 *км*, на мопеде отправился курьер. Через час после этого из A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый курьер достиг B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 *км/час*?

2. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{3}{2} - 2\cos 2x.$$

3. Решить уравнение

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}.$$

4. Длина каждого ребра правильной шестиугольной призмы равна 1 *дм*. Найти площадь сечения, проходящего через сторону основания и большую диагональ призмы.

5. В полуокружности радиуса R с диаметром AB проведены две хорды AC и AD. Длина первой равна длине стороны квадрата, а второй — длине стороны правильного треугольника, вписанных в данную окружность. Определить длину хорды CD.

Физический факультет

Вариант 3

1. Основанием пирамиды $SABCD$ служит ромб $ABCD$, длина стороны которого равна a, величина острого угла ABC равна α. Две боковые грани SAB и SBC перпендикулярны основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

2. Найти наименьшее значение функции

$$y(x) = 1 - 3x + 6x^2.$$

Построить график этой функции.

3. Решить уравнение

$$\sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x = 7.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0.$$

Вариант 4

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом φ, ее длина равна l, острый угол между диагоналями основания β. Определить объем параллелепипеда.

2. Решить неравенство

$$3x < 2x^2 + 1.$$

Построить графики функций $y = 3x$ и $y = 2x^2 + 1$, использовать эти графики для проверки решения.

3. Решить уравнение

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

Физика

1. Радиус планеты Марс составляет 0,53 радиуса Земли, а ее масса равна 0,11 массы Земли. Определить, во сколько раз сила притяжения на поверхности Марса меньше силы притяжения на Земле.

2. Льдина постоянной толщины плавает в воде, выдаваясь над поверхностью на $a = 2$ *см*. Какова масса льдины, если ее площадь $S = 150$ *см²*? Плотность льда $\rho = 0{,}92$ *г/см³*.

3. Шарик массой $m = 200$ *г*, подвешенный на нити длиной $l = 20$ *см*, отклонен от положения равновесия так, что нить составляет угол $\alpha = 60°$ с вертикалью. Шарику сообщили скорость $|\vec{v}| = 2$ *м/сек* в направлении, перпендикулярном нити. Какова должна быть прочность нити, чтобы шарик при движении не оборвал ее?

4. Пуля массой $m = 10$ *г* попадает в деревянный брусок массы $M = 990$ *г*, подвешенный на длинной нити, и застревает в нем. Определить скорость бруска сразу после попадания в него пули, если скорость пули $|\vec{v}_0| = 500$ *м/сек*. Какая часть кинетической энергии пули перешла в тепло?

5. Закрытый цилиндр объемом $V = 1$ *л* разделен на две части подвижным невесомым поршнем. В одной части цилиндра находится газ при температуре $t_1 = 0$ °C, в другой — такая же масса данного газа при температуре $t_2 = 100$ °C. Определить объемы V_1 и V_2 частей цилиндра при равновесии поршня. Поршень и стенки сосуда теплонепроницаемы.

6. Два заряда, находясь в воздухе на расстоянии $r_1 = 10$ *см*, действуют друг на друга с силой $|\vec{F}_1| = 56$ *дин*, а в некоторой непроводящей жидкости на расстоянии $r_2 = 5$ *см* — с силой $|\vec{F}_2| = 4$ *дин*. Какова диэлектрическая проницаемость ε жидкости?

7. Найти внутреннее сопротивление генератора, если известно, что мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при двух значениях внешнего сопротивления: $R_1 = 5$ *ом* и $R_2 = 0{,}2$ *ом*.

8. В однородном магнитном поле, индукция которого $|\vec{B}| = 1$ *тл*, находится плоский виток площадью $S = 10^{-2}$ *м²*, расположенный перпендикулярно к магнитным линиям. Сопротивление витка $R = 0{,}2$ *ом*. Какой заряд протечет по витку, если поле исчезнет?

9. Расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения одинаковы и равны $a = 0{,}4$ *м*. Как изменится положение и величина изображения, если предмет сместить на расстояние $l = 20$ *см* по направлению от линзы?

10. Определить длину волны λ света, которым освещается поверхность металлического сплава, если кинетическая энергия фотоэлектронов $W = 0{,}35 \cdot 10^{-19}$ *дж*, а работа выхода электронов из сплава $A = 4{,}15 \times 10^{-19}$ *дж*. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*.

В. Бестаева, О. Овчинников, Г. Шадрин

Всесоюзный заочный финансово-экономический институт

Всесоюзный заочный финансово-экономический институт (ВЗФЭИ) был организован в 1930 году. В настоящее время это один из крупнейших вузов страны, базовый институт заочного экономического образования в нашей стране. В нем обучаются более 30 тысяч студентов.

Институт готовит экономистов высшей квалификации следующих специальностей: финансы и кредит (специализации: финансы, кредит, финансирование и кредитование капитальных вложений, финансы промышленности), бухгалтерский учет (специализации: учет в промышленности, учет в строительстве, учет в сельском хозяйстве), планирование промышленности, экономика труда, статистика, планирование народного хозяйства, экономика и планирование материально-технического снабжения.

Учебно-методическая и научно-исследовательская работа в институте осуществляется двадцатью кафедрами, в составе которых имеются видные советские ученые-экономисты.

Студенты ВЗФЭИ изучают высшую математику на трех курсах: на первом — общий курс (аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, теория рядов), на втором — теория вероятностей и математическая статистика, на третьем — математическое программирование.

Основной формой обучения студентов во ВЗФЭИ является их самостоятельная работа. Однако студенты обязаны посещать установленные учебным планом очные занятия.

Учебный процесс максимально приближен к месту жительства студентов. Он осуществляется в 24 территориальных подразделениях института (филиалы, факультеты, учебно-консультационные пункты), расположенных в Архангельске, Барнауле, Белгороде, Брянске, Владимире, Волгограде, Воронеже, Горьком, Калуге, Кемерове, Кирове, Курске, Липецке, Москве, Омске, Орле, Оренбурге, Пензе, Смоленске, Туле, Уфе, Хабаровске, Челябинске, Ярославле. Студентам, живущим в этих городах, регулярно (два-три раза в неделю) в течение всего учебного года читаются лекции, проводятся практические занятия, консультации. Студенты, проживающие в других местах («периферия») в начале учебного года вызываются на «установочные» лекции. Экзамены для всех студентов проводятся два раза в год (зимой и летом).

Поступающие во ВЗФЭИ сдают вступительные экзамены по математике (письменно), русскому языку и литературе (письменно), истории СССР (устно) и географии СССР (устно).

На основе конкурсного отбора в первую очередь зачисляются лица, характер работы которых соответствует избранной в вузе специальности (если они работают по этой специальности не менее шести месяцев), выпускники средних специальных и средних профессионально-технических учебных заведений, поступающие на родственные специальности, а также уволенные в запас военнослужащие срочной службы (если с момента увольнения в запас прошло не более трех лет).

Ниже приведены два варианта заданий на вступительном письменном экзамене по математике во ВЗФЭИ в 1976 году.

Вариант 1

1. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену каждым станком, если первый работал в эту смену 6 часов, а второй — 7 часов, причем вместе они обработали 616 деталей?

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 3^y 9^x = 81, \\ 2\lg(x+y) - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$$

3. Решить неравенство $\dfrac{2}{x} > \dfrac{1}{2}$.

4. Решить уравнение
$$\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1} + \sqrt{\sqrt[3]{x} + 2} = 3.$$

5. Около круга описан равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 10 *см*, основания 12 *см*. Определить радиус круга.

Вариант 2

1. Две организации приобрели некоторое количество разных туристических путевок, первая — на 300 рублей, вторая — на 270 рублей. Вторая организация купила на 5 путевок меньше, но заплатила за каждую путевку на 3 рубля больше. Сколько путевок купила каждая организация?

2. Решить уравнение
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3-2x} = 15\frac{5}{8}.$$

3. Решить неравенство
$$\frac{x+4}{x+2} < 2.$$

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 5x + 2y = 100, \\ \lg x - \lg y = \lg 1{,}6. \end{cases}$$

5. Упростить выражение ($1 + \cos 2\alpha \neq 0$, $1 + \cos\alpha \neq 0$)
$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

А. Карасев

Примерные варианты вступительных письменных экзаменов по математике в вузы в 1977 году

В этом номере мы продолжаем публиковать примерные варианты вступительных письменных экзаменов по математике в вузы в 1977 году, проводимых по новой программе (см. «Квант» № 2).

Варианты I уровня соответствуют физико-математическим факультетам университетов и факультетам прикладной математики втузов, II уровня — факультетам технических вузов.

I уровень

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_{2x}(3x+1)>2.$$

2. Найти множество значений функции

$$f(x)=\sin x\cdot\cos 2x.$$

3. Доказать, что плоскости, заданные уравнениями $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$, $(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)y+(c_1+c_2)z=0$, содержат общую прямую.

4. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC соответственно выбраны точки D и E так, что $|BD|=|CD|$, $|AE|=2|CE|$. Найти $\frac{|BC|}{|AB|}$, если известно, что прямые AD и BE взаимно перпендикулярны, а $\widehat{ABC}=60^\circ$.

5. При каком положительном a площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\frac{x}{6}+\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=a$, $x=2a$, принимает наименьшее значение?

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$x^3(x-2)^3-x\sqrt{x(x-2)^3}=2.$$

2. Доказать, что если $|x|\leqslant 2$, то $3x^5-5x^3-30x<40$.

3. При каком значении $x_0\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ касательные к графику функции $f(x)=\sin x+\sin 2x$ в точках с абсциссами x_0 и $x_0+\frac{\pi}{2}$ параллельны?

4. Разносторонний треугольник разрезали на два треугольника. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около этих двух треугольников, различны.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра AA_1, L—центр грани CC_1D_1D. Найти угол между плоскостями BKL и AD_1C.

II уровень

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3(6x^2-x)}>2.$$

2. Найти наименьший член последовательности

$$x_n=n^4-5n^3-3n^2.$$

3. Решить уравнение

$$\cos x\cos 3x=2\sin x\sin 3x.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, касательной к ней в точке с абсциссой 2 и осью абсцисс.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра AA_1, L — середина ребра AD, M — центр грани CC_1D_1D. Доказать, что прямые KM и B_1L взаимно перпендикулярны.

Ю. Ионин

Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева, 1977

Вариант 1

1. Исследовать функцию

$$y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2$$

и построить схематически ее график.

2. Сколько четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

3. Решить уравнение

$$\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$\lg(x^2+1)=2\lg^{-1}(x^2+1)-1.$$

5. В кубе, длина ребра которого равна a, проведены плоскости через его центр и каждое ребро. Определить объем и поверхность каждой из образовавшихся пирамид.

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+2x+8$ и осью абсцисс.

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$$

3. Даны координаты точек: $A(0;1;-2)$, $B(1;-1;-4)$, $C(2;7;1)$. Найти $\widehat{BAC}$.

4. Решить уравнение

$$1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

5. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны, их длины $\sqrt{70}$ *см*, $\sqrt{99}$ *см*, $\sqrt{126}$ *см*. Найти объем и площадь основания пирамиды.

В. Ляховский



Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на доступные школьникам книги по математике и физике, вышедшие во II квартале 1977 года. Большинство из них можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., *Элементы комбинаторики*. Перевод с укр. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Комбинаторика — один из разделов дискретной математики, который приобрел важное значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике. Знание комбинаторики необходимо представителям самых разных специальностей — физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по теории кодов.

В этой книге излагаются основные понятия комбинаторики и методы решения комбинаторных задач. При этом систематически используются понятие множества и операции над множествами, поскольку большинство комбинаторных задач можно сформулировать как задачи теории конечных множеств. Особо нужно отметить метод производящих функций и метод траекторий. Эти методы важны сами по себе, так как находят применение не только в комбинаторике, но и в других разделах современной математики.

Книга предназначена школьникам старших классов. В основу книги положены лекции, прочитанные учащимся Украинской заочной физико-математической школы.

Издательство «Мир»

2. Линдгрен Г. *Занимательные задачи на разрезание*. Перевод с англ. Объем 12 л., тираж 50 000 экз., цена 85 к.

Среди «математических развлечений» задачи на разрезание и складывание фигур традиционно занимают почетное место. Автор настоящей книги, Гарри Линдгрен, — не профессиональный математик, он всего лишь скромный служащий патентного бюро в Канберре (Австралия); а геометрические разрезания — это его хобби. Собранные и придуманные Линдгреном задачи на первый взгляд могут показаться бесконечно многообразными. Однако в большинстве из них используются всего лишь несколько типов разрезаний (как правило, это те, с помощью которых из одного параллелограмма можно получить другой). И оказывается, существуют более или менее стандартные приемы, позволяющие найти нужное решение. Вот этим-то приемам и посвящена книга Линдгрена.

В основе книги лежит известная еще с античных времени задача о равновеликих и равноставленных фигурах. Ясно, что если две фигуры равносоставлены, то они равновелики; так что *равновеликость фигур является необходимым условием их равносоставленности*. Для плоских многоугольников равновеликость является также и достаточным условием их равносоставленности — этот факт был установлен еще в 1832 году венгром *Фаркашем Бойяи* и год спустя — немецким офицером *Гервином*. Однако в случае пространственных многогранников это уже не так: в 1900 году ученик знаменитого Давида Гильберта *Макс Денн* показал, что равновеликость многогранников не является достаточным условием их равносоставленности, и указал некоторые дополнительные условия, необходимые для равносоставленности двух равновеликих многогранников. (В 1974 году ученик Хадвигера *Жан-Пьер Сидлер* доказал, что сформулированные М. Деном необходимые условия являются также и достаточными.)

Проблематика, связанная с задачами на разрезание, до сих пор привлекает к себе внимание крупных математиков; многие примыкающие к ней задачи еще не решены. Однако в данной книге все построения осуществляются, в основном, для плоских многоугольников и укладываются, тем самым, в рамки сформулированной выше теоремы Бойяи — Гервина. Предмет книги составляет, по существу, одна проблема: требуется разрезать заданную плоскую фигуру на наименьшее возможное число частей, из которых можно сложить другую плоскую фигуру, равновеликую первой. Требование минимальности числа частей здесь существенно — во всех случаях ищется самое лучшее разбиение фигуры на меньшие части.

Геометрические задачи на разрезание еще далеко не исчерпаны. Техника, описываемая Линдгреном, вовсе не является обязательной. Тот, кто достаточно сообразителен и не пожалеет времени, всегда найдет достойное открытия разрезание. Так что эта книга предоставляет читателю широкие возможности для личного творчества. «Испытайте себя в области разрезаний, — пишет Линдгрен. — «Я надеюсь, что эта книга убедит вас, что такое времяпрепровождение не слишком утомительно и отнюдь не тривиально».

Физика

Издательство «Наука»

1. Китайгородский А. И. *Порядок и беспорядок в мире атомов*. Издание 5-е, испр. и доп. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 33 к.

Книга представляет собой популярное изложение учения о строении веществ — от простейших молекул до сложнейших биологических систем. Автор избрал оригинальный своеобразный подход к этой большой теме. Вопросы атомной структуры рассмотрены как проявления порядка и беспорядка в мире атомов. Такой подход очень плодотворен, поскольку наряду с телами, для которых слова «порядок» или «беспорядок» являются точной характеристикой расположения в них частиц, часто встречаются тела, в которых порядок и беспорядок неотделимы друг от друга. Проблема строения биологических веществ — мускулов, тканей, клетки, не говоря уже о молекулах белков и нуклеиновых кислот, является интереснейшей иллюстрацией своеобразной борьбы порядка и беспорядка в живой материи.

Книга написана очень живо, читается с большим интересом и рассчитана на самый широкий круг читателей, знакомых лишь с основами физики.

2. Капица П. Л. *Эксперимент, теория, практика.* Объем 19 л., тираж 30 000 экз., цена 89 к.

В этой книге собраны доклады академика П. Л. Капицы, сделанные им в различные годы перед широкой аудиторией.

Часть из этих выступлений содержит популярное изложение проводимых им экспериментов, другая часть посвящена изложению деятельности выдающихся ученых, дается анализ их научного творчества.

Большая часть выступлений, публикуемых в книге, посвящена вопросам творческого воспитания молодежи, подготовке и отбору научных кадров.

В книгу вошли также выступления и статьи, посвященные вопросам организации науки, укреплению ее связи с практикой, перспективам развития науки, проблемам отношения человека и природы, борьбе за мир и прогресс.

Книга будет интересна самым широким кругам читателей.

Издательство «Высшая школа»

3. Милковская Л. Б. *Повторим физику.* Издание 3-е, перераб. и доп. Объем 30 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 09 к.

Это пособие предназначено для абитуриентов. Оно составлено в полном соответствии с программой по физике для поступающих в вузы. Каждая глава посвящена одной из тем программы. В ней наряду с освещением данной темы приведены примеры решения задач, задачи для самостоятельных решений и вопросы для повторения.

Книга будет полезна для всех лиц, самостоятельно готовящихся к поступлению в вузы.

Издательство «Просвещение»

4. Левитан Е. П. *Астрофизика школьникам.* Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 25 к.

В интересной и вполне доступной для учащихся форме автор рассказывает о современных проблемах астрофизики. В книге затрагивается широкий круг астрономических явлений и объектов: Солнце, звезды, галактики, квазары, планеты.

Книгу чрезвычайно оживляет большое количество задач и вопросов, предназначенных для самостоятельных решений.

5. *Школьный астрономический календарь на 1977/78 учебный год.* Составитель М. М. Дагаев. Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 20 к.

Календарь содержит основные сведения о Солнце, Луне, планетах, звездах и других небесных объектах, а также справочные данные, необходимые для наблюдения астрономических явлений в 1977/78 учебном году.

Книга предназначена в первую очередь для астрономических кружков.

«Атомиздат»

6. Погодин С. Л., Либман Э. П. *Как добыли советский радий.* Издание 2-е, доп. Объем 18 л., тираж 50 000 экз., цена 80 к.

В книге живо и занимательно на основе богатейших архивных материалов излагается история создания отечественной радиевой промышленности.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

7. Блохинцев Д. П. *Рождение мирного атома.* Объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 20 к.

Автор книги — крупный ученый в области ядерной физики, Герой Социалистического Труда Дмитрий Иванович Блохинцев — с момента создания занимал пост директора Объединенного института ядерных исследований в г. Дубне (с 1956 по 1965 г.). Ныне он руководит лабораторией теоретической физики в этом институте. Имя Д. И. Блохинцева связано с созданием первой в мире атомной электростанции. В 50-х годах, будучи директором Физико-энергетического института, автор книги руководил работами по проектированию и сооружению первой в мире АЭС. С позиций непосредственного участника он рассказывает об этом великом событии, о первых попытках мирного применения ядерной энергии, о первой мирной атомной стройке.

Книга написана живым языком и переносит читателя в трудное и увлекательное время, в общество интереснейших людей и захватывающих научных проблем. Читатель сам ощутит атмосферу напряженного творческого поиска, испытает радость победителя.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей и будет интересна как специалистам, так и школьникам.

И. Клумова, М. Смолянский



К статье «Читатели советуют»

1. а) $(xy - y + 1)(xy + 2x - y + 1)$;

б) $(x^2 + 2x - y)(x^2 - 2x + y + 2)$.

2. а) Указание. Рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно b.
в) Указание. Рассмотреть уравнение $x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0$.

3. Указание. Решить систему относительно параметров a, b, c.

4. Указание. Применить выражения для $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$ и заметить, что $\operatorname{tg}^4(x/2) \in]0;\ 1[$ при $x \in]0;\ \pi/2[$. Далее воспользоваться известным неравенством $\operatorname{tg} y > y$ при $y \in]0;\ \pi/2[$.

5. «Ответ»: $S = \frac{3}{8}\sqrt{3}$ $см^2$. Далее воспользоваться тем, что площадь параллелограмма со сторонами a и b не превосходит площади прямоугольника с такими же сторонами.

6. «Ответ»: 5 *см*. Пусть BH — высота треугольника ABC, о которой идет речь в условии задачи, O — центр вписанного круга, K — точка касания этого круга со стороной AC треугольника, $|AC| = 12$ *см*. Заметить, что $|BH| < |BO| + |OK|$.

7. «Ответ»: $\arccos\frac{25}{28}$. Пусть диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке T. Доказать, что из данных задачи следует неравенство $|OT| > R$, где R — радиус круга.

8. Первый велосипедист финиширует раньше. Получить ответ, используя понятие средней скорости движения или привлекая графики движения.

9. Ребра коробки 5/2 *см*, 2 *см*, 1/2 *см*.

10. $2l/\pi$.

11. $4\sqrt{3}/3$.

12. $1:1:\sqrt{2-\sqrt{3}}:\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

14. 1000 $см^3$. Указание. Рассмотреть пирамиду $SABCD$ как объединение пирамид $BASC$ и $DASC$ (с высотами, лежащими на прямой BD).

К статье «Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова»

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики-процессов управления

1. $7p/3c$ *сек*. Указание. Если x (*бит/сек*) — скорость ввода информации, то время работы кибернетического устройства равно

$$T = \frac{p}{x} + \frac{p}{c} + \frac{p}{3c - x} = \frac{p}{c} + \frac{3cp}{x(3c - x)}.$$

2. Если $a = 0$, то решений нет;

если $a > 0$, то $\frac{24 - 5\sqrt{5}}{11}a < x < \frac{24 + 5\sqrt{5}}{11}a$;

если $a < 0$, то $|a| \leqslant x < \frac{8 + 5\sqrt{5}}{3}|a|$.

Указание. $\sqrt{2(x - \sqrt{x^2 - a^2})} = |\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a}|$.

3. $x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$ $(k \in Z)$. Указание. Для $t = \cos x - \sin x$ получаем уравнение $\sqrt{-t - t^2 + 1} = t$, откуда $2t^2 + t - 1 = 0$, $t = 1/2$ или $t = -1$. Корень $t = -1$ является посторонним.

4. $\frac{3k \pm \sqrt{12k - 3k^2}}{6k}a$ $(1 < k \leqslant 4)$.

5. $R/\sqrt{17}$.

Физический факультет

1. Указание. Пусть t — искомое время, $T = t + L/c$, τ — время торможения, тогда

$$\begin{cases} S = vT + \frac{aT^2}{2} + (v + aT)\tau + \frac{a_1\tau^2}{2}, \\ v + at + a_1\tau = 0. \end{cases}$$

Исключая τ, получим для T уравнение

$$a(a - a_1)T^2 + 2v(a - a_1)T + (v^2 + 2a_1S) = 0.$$

Находя из него T и учитывая ограничение $t \geqslant 0$, получаем ответ:

если $a = 0$ и $S > v\left(\frac{L}{c} - \frac{v}{2a_1}\right)$, то

$$t = \frac{S}{v} + \frac{v}{2a_1} - \frac{L}{c};$$

если $a > 0$ и

$$S \geqslant \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2a_1}\right)\left(v + \frac{aL}{c}\right)^2 - \frac{v^2}{2a},$$

то

$$t = \frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{a_1(v^2 + 2aS)}{a_1 - a}} - v\right) - \frac{L}{c};$$

в остальных случаях решения нет.

2. $\sqrt{2}\,ab/3$. Указание. Если секущая плоскость пересекает сторону DC в точке L и $|DL| = x$, то площадь сечения

$$S = \frac{b}{2\sqrt{2}a}x(4a - 3x),$$

поэтому $S(x)$ достигает наибольшего значения при $x = 2a/3$.

3. $x = 0$, $\pm 2\pi$. Указание. Для $t = \sin x - \cos x$ получаем уравнение $t^2 - 8t - 9 = 0$, откуда $t = -1$ или $t = 9$. Корень $t = 9$ посторонний.

4. Если $p \leqslant -8$, то решений нет; если $-8 < p \leqslant -3$, то $(p-4)/6 \leqslant x < 1 - \sqrt{1-p}$; если $-3 < p < -2$, то $(p-4)/6 \leqslant x < -1$; если $p = -2$, то решений нет; если $p > -2$, то $-1 < x \leqslant (p-4)/6$. Указание. Если $0 < x + 2 < 1$, то уравнение принимает вид $p \leqslant 6x + 4$, а если $x + 2 > 1$, то $p \geqslant 6x + 4$. Учтите, что $x^2 - 2x + p > 0$.

5. $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $y_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $y_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y_4 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Химический, психологический и экономический факультеты

1. 3%. 2. Если $a > 1$, то $x > \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; если $0 < a < 1$, то $1 < x < \dfrac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. 3. $x_1 = \pi/4 + k\pi$, $x_2 = \pm\pi/3 + k\pi$ $(k \in Z)$. Указание. Привести уравнение к виду $(\sin^2 x - 3\cos^2 x) \times (\cos x - \sin x) = 0$. 4. $bc/(a+b)$. Указание. $[CD]$ — биссектриса угла ACB. 5. $R\,(2\sqrt{k^2-k} - k)/k$ $(k > 4/3)$.

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. 336 *км*. 2. $x = \pm\pi/6 + k\pi$ $(k \in Z)$.

3. $1/5 \leqslant x < 2/9$. 4. $x = -2/3$.

5. $(2\sqrt{3} - 3)\, l^2/4$.

Биолого-почвенный и географический факультеты

1. 14 человек. 2. Если $a > 1$, то $x > a^3$; если $0 < a < 1$, то $0 < x < a^3$. Указание. Обозначить $\log_a x$ через t. 3а. $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$. 3б. $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = k\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$ $(k \in Z)$.

4. $\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha/2}\,(2\sin\alpha/2 + \cos\alpha/2)}$.

5. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\, a^2$.

К статье «Уральский государственный университет им. А. М. Горького»

Математика

Математико-механический факультет

1. $m \in [\,2/5;\ 1/2\,[$. 2. При $\alpha \in\ ]\,0;\ \pi/3\,]$ $V_1 = 2a^3 \sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$; при $\alpha \in\ ]\,\pi/3;\ \pi/2\,[$ $V = V_1$ или $V = 2a^3 \times \cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}}$. 3. $x = 0$.

4. $x_1 = \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$, $x_2 = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$ $(k \in Z)$.

Физический факультет

1. 31,2 года. 2. $RS\sin 2\alpha/(2\sin\alpha + 2\cos\alpha)$. 3. $x \in\ ]-1;\ 0\,[$. 4. $x = (-1)^{n+1}\pi/12 + n\pi/2$ $(n \in Z)$.

Физика

Математико-механический факультет

1. $t = \sqrt{\dfrac{2h}{|\vec{g}|(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)\sin\alpha}} \approx 1{,}4$ *сек*.

2. $U_2 = kU_1 - I_H r_2 = 6$ *в*.

3. Показание вольтметра увеличится в 4 раза.

4. $R = 2d\,\dfrac{L-d}{L-2d}$.

Физический факультет

1. $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\gamma\rho}}$.

2. $\Delta p/p = 50\%$.

3. $d \approx \dfrac{Da}{4L} \approx 10^{-5}$ *м* $= 10^{-2}$ *мм*.

4. $l = h_2 + h_1 \operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n}\right) \approx 2{,}2$ *м*.

К статье «Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии»

Математика

Вариант 1

1. $x_1 = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$, $x_2 = \pi/2 + k\pi$, $x_3 = (-1)^k\,\pi/6 + k\pi (k \in Z)$. Указание. Привести уравнение к виду $\cos x\,(2\cos x + 1) \times (2\sin x - 1) = 0$. 2. $x = \log_2 3 - 1$. Указание. Привести уравнение к виду $(3/2)^{2/x} = (3/2)^{1/x} + 2$. 3. $x \in\ ]-4; -3\,[\ \cup\ ]\,5;\ 6\,[$. 4. $\operatorname{arcctg}(\sqrt{k^2-1}/2)$.

Вариант 2

1. $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ $(k \in Z)$. 2. $x = 100$. Указание. Привести уравнение к виду $(5/7)^2 = (5/7)^{\lg x}$. 3. $x \in [-2;\ 2\,[$. 4. 4/9, 4/9.

Вариант 3

1. $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \pm\pi/3 + 2k\pi =$ $= (k \in Z)$. 2. $x = 10$. 3. $x \in\ ]-\infty;\ -2\,]$. 4. $H\,((d^2 - H^2)/2 + H^2\operatorname{ctg}^2\alpha/3)$.

Физика

1. $|\vec{v}_{cp}| = \dfrac{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}{0{,}4|\vec{v}_2| + 0{,}6|\vec{v}_1|} \approx 16{,}7$ *м/сек* ≈ 60 *км/час*.

2. $h \approx 86{,}4$ *м*; $|\vec{v}| \approx 41{,}2$ *м/сек*.

3. $|\vec{F}_н| = m\left(|\vec{g}| - \frac{2s}{t^2}\right) = 3680$ *н*.

4. $V_л = \frac{\rho_в V}{\rho_в - \rho_л} = 1545$ *м³*; $V_п = 1350$ *м³*.

5. $|\vec{F}_{ср}| = \frac{m(|\vec{v}_1|^2 - |\vec{v}_2|^2)}{2d} = 2250$ *н*.

6. $\rho = \frac{p\mu}{RT} = 1{,}23$ *кг/м³*.

7. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 1{,}02 \cdot 10^7$ *м/сек*.

8. $E_1 = \frac{\Phi}{4\pi h^2} = 4{,}68$ *лк*; $E_2 = \frac{\Phi h}{4\pi (h^2 + l^2)^{3/2}} = 3{,}33$ *лк*.

9. $f = \frac{Fd}{d - F} = 60$ *см*; $H = h\frac{f}{d} = 25$ *см*.

10. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda} - \frac{2A}{m}} \approx 2{,}75 \cdot 10^5$ *м/сек*.

К статье «Московский институт стали и сплавов»

Математика, 1976 г.

Физико-химический факультет

1. $x \in]0;\ 1/2[\cup]2;\ 3[$. 2. $x = \pm 2\sqrt{6}/11$; $S = 1 \pm 2\sqrt{6}/3$. 3. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pi/20 + k\pi/10\ (k \in Z)$. 4. $x = (-1 + \sqrt{17})/4$, $y = 1/2$. 5. $a(\sqrt{48H^2 + a^2} - a)/(48H)$.

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. 6 секунд. 2. $x_{1,2} = 1/2$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Указание. Разделить первое уравнение на xy, второе на x^2y^2. 3. $x \in]-3;\ -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6};\ 3[$. 4. $x = \pi/2 + 2k\pi\ (k \in Z)$. Указание. Из условия следует система $\sin x = 1$, $\cos 6x = -1$. 5. $S\sqrt{S\cos\alpha} \times \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Big/ \left(3\sqrt{2\pi}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Факультет металлургии цветных, редких металлов и сплавов

1. $x \in]-1;\ 0] \cup [\log_3 2;\ 1[$. 2. $x = 50$. 3. 486. 4. $x = -\pi/2 + 2k\pi\ (k \in Z)$. 5. $l^2 \sin^2 2\alpha \cos\beta / \sin^2(\alpha + \beta)$.

Факультет полупроводниковых материалов и приборов

1. $x \in \{-1;\ 2\}$. 2. $(6 \pm \sqrt{6})/6$, 1, $(6 \mp \sqrt{6})/6$. 3. $x \in [1/2;\ 2] \cup [4;\ \infty[$. 4. $x_1 = \pi/4 + k\pi$, $x_2 = \pi/2 + k\pi\ (k \in Z)$. 5. $R^3(4\pi/3 - 32\sqrt{3}/81)$.

Математика, 1977 г.

Вариант А

1. $]-\infty;\ -2] \cup]1;\ 2]$. 2. $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/9$. Указание. Уравнение приводится к виду $\cos\frac{7x}{2}(1 - 2\cos 3x) = 0$. 3. По условию $C_n^3 + C_n^1 = 2C_n^2$, откуда $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} + n = 2\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$, $n(n^2 - 9n + 14) = 0$, $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 7$. Первые два значения n не подходят (нет четвертого члена разложения), при $n = 7$ получаем коэффициенты 7,21,35. 4. $V = 5\pi a^3/8$. Указание. Пусть треугольник ABC вращается вокруг оси l, параллельной стороне AC. Тогда цилиндр с образующей $[AC]$ и осью l дополняет тело вращения до двух усеченных конусов с осью l и образующими $[BC]$ и $[AB]$. 5. Касательную надо провести в точке M (3/2; 9/4). Указание. Уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке с абсциссой t и ординатой t^2 имеет вид $y = 2tx - t^2$ (по формуле $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, поскольку $x_0 = t$, $f'(x_0) = f'(t) = 2t$). Подставляя сюда $x = 1$ и $x = 2$, находим основания трапеции, а затем ее площадь $S(t) = 3t - t^2$. Далее уравнение $S'(t) = 0$ дает $3 - 2t = 0$, $t = 3/2$ (критическая точка), $S(3/2) = 9/4$, что больше $S(1) = S(2) = 2$; значит, в точке $t = 3/2$ функция $S(t)$ принимает наибольшее значение.

Вариант Б

1. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 9)}{(x+3)(x^2+1)}$.

Сокращая на $(x + 3)$ и подставляя $x = -3$, получаем ответ: $-7\frac{1}{5}$. 2. $x = 2$. 3. Указание. Каждое неравенство системы задает на плоскости xOy полуплоскость, а вся система — пересечение этих полуплоскостей, в данном случае — треугольник с вершинами A (0; 0), B (—2; 1), C (2; 2). 4. Указание. Получить равенство $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$.

5. $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$. Указание. Площадь криволинейного треугольника равна 1.

Вариант В

1. $D(f) =]-1;\ 1[$. 2. Наибольшее значение $y(\pi/6) = \frac{3\sqrt{3} - \Pi}{6}$, наименьшее $y(5\pi/6) = \frac{-3\sqrt{3} - 5\pi}{6}$. Указание. Производная $y'(x) = 2\cos 2x - 1$ (определена всюду). Из уравнения $y'(x) = 0$ находим критические точки $x_1 = \pi/6$, $x_2 = 5\pi/6$ и сравниваем значения функции в точках 0, $\pi/6$, $5\pi/6$, π. 3. $n_1 = 9$, $n_2 = 10$. Указание. Из условия задачи получаем уравнение $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$, откуда $(n-2)(n-3)(n-4)(n^2 - 19n + 90) = 0$, но $n \geqslant 5$. 4. $D(-1;\ 1;\ 1)$; $(\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}}) = 120°$. Указание. $\vec{AB} = (6;$

—1; 1), $\vec{AB}=\vec{DC}$, $\vec{AC}=(8;\ 2;\ 2)$, $\vec{BD}=(-4;\ 4;\ 0)$, $\cos(\widehat{\vec{AC},\ \vec{BD}})=-{}^1/_2$. 5. 48. Указание. Высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

Физика

Физико-химический факультет

1. $E = m|\vec{g}|\,l\,(1-\cos\alpha) \approx 0,3$ *дж*, $|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{g}|\,l\,(1-\cos\alpha)} \approx 2,4$ *м/сек*.

2. $V_2 = \dfrac{V_1(p_0+\rho|\vec{g}|\,h)\,T_2}{p_0T_1} \approx 2,9$ *мм*³.

3. $q = \dfrac{\pi d^3|\vec{g}|\,(\rho_2-\rho_1)}{6|\vec{E}|} \approx 33$ ед. заряда СГСЭ.

4. $n_2 = \dfrac{n_1}{1+\dfrac{n_1-1}{D_1F_2}} \approx 1,7$.

К статье «Московский институт электронного машиностроения»

Математика

Вариант 1

1. Пусть в секунду ЭВМ выполняет x операций типа A и y операций типа B. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{9\cdot10^6}{x}+\dfrac{16\cdot10^6}{y}=700, \\ \dfrac{18\cdot10^6}{x}+\dfrac{8\cdot10^6}{y}=800, \end{cases}$$

откуда $x=3\cdot10^4$, $y=4\cdot10^4$.

2. Упростив данное уравнение, получим

$$\frac{4}{3}\sin x = -\frac{4\sin 3x\,(9\cos 4x+1)}{1+9\cos 4x}$$

или

$$3\sin 3x+\sin x=0,$$

откуда $\sin x=0$, $x=\pi k$ или $\sin x=\pm\sqrt{5/6}$, но тогда $\cos 2x=-\dfrac{2}{3}$, $\cos 4x=-\dfrac{1}{9}$, а эти значения x не входят в ОДЗ. Найдем требуемую сумму корней. Имеем $-12<k\pi<39$, откуда $-3\leqslant k\leqslant12$ и $-3\pi-2\pi-\ldots+11\pi+12\pi=72\pi$.

3. Из условия следует, что $\dfrac{1+bx}{1-bx}>0$ и $\dfrac{1-ax}{1+ax}>0$, откуда $x^2<\dfrac{1}{b^2}$ и $x^2<\dfrac{1}{a^2}$. Возводя данное уравнение в квадрат и упрощая, получим $2x\,(a^2bx^2+b-2a)=0$, откуда $x=0$ (это — решение уравнения при любых значениях a и b) или $x^2=\dfrac{2a-b}{a^2b}$. Учитывая еще найденные выше необходимые условия, получаем ответ:

$x=0$ при $a\geqslant b>0$ или $b\geqslant 2a>0$;

$x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{(2a-b)/(a^2b)}$ при $0<a<b<2a$.

4. ОДЗ: $a>0$, $a\neq1$, $x>2$. Пусть $a>1$. Тогда, потенцируя, получаем $x^2-2x-a>0$, откуда с учетом ОДЗ $x>1+\sqrt{1+a}$. Пусть $0<a<1$, тогда $x^2-2x-a<0$, $2<x<1+\sqrt{1+a}$.

Ответ: $x\in\,]\,2;\ 1+\sqrt{1+a}\,[$ при $a\in\,]\,0;1\,[$;

$x\in\,]\,1+\sqrt{1+a};\ \infty\,[$ при $a\in\,]\,1;\ \infty\,[$.

5. $c^3\sin^2 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta/24$.

Вариант 2

1. 10 суток. 2. $x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, сумма равна $121\,\pi$. 3. $x\in\,]\,1;\ 3/\sqrt{5}\,]$. 4. $x=a^{-2}$ при $a\in\,]\,0;\ 1\,[\,\cup\,]\,1;\ \infty\,[$; при остальных a решений нет. 5. $H^2\sin^2\alpha/[\cos\alpha\cos(\beta-\alpha)]$.

Физика

1. Второе тело надо бросить с запаздыванием $\tau_{1,2}=\dfrac{|\vec{v}_0|}{|\vec{g}|}-\dfrac{s}{|\vec{u}|}\pm$ $\pm\sqrt{\dfrac{s^2}{|\vec{u}|^2}+\dfrac{|\vec{v}_0|^2}{|\vec{g}|^2}-2\dfrac{h}{|\vec{g}|}}$; окончательно $\tau_1\approx3,4$ *сек* и $\tau_2\approx0,6$ *сек*.

2. $\Delta t=\dfrac{m_1m_2\,(|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2)}{2c\,(m_1+m_2)^2}\approx0,024$ *град*.

3. $\omega=\sqrt{2|\vec{g}|\,\dfrac{R-r}{R^2+r^2}\,(1-\cos\theta)}\approx$ $\approx4,45$ *рад/сек*.

4. $a=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\,b=3\cdot10^{-2}$ *м*.

5. $|\vec{v}|=2,1\cdot10^{-2}$ *м/сек*.

6. $U_1=\dfrac{C_2}{C_1+C_2}\,\dfrac{(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1)\,R_2+\mathcal{E}_2R_1}{R_1+R_2}=$ $=5,25$ *в*,

$U_2=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}\,\dfrac{(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1)\,R_2+\mathcal{E}_2R_1}{R_1+R_2}=1,75$ *в*.

7. $h=\dfrac{2\pi m\,|\vec{v}|\cos\alpha}{e\,|\vec{B}|}\approx9\cdot10^{-5}$ *м*.

8. $|\vec{v}_{1,2}|=\dfrac{|\vec{v}_0|}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\dfrac{4hc}{m\,|\vec{v}_0|^2\,\lambda}}\right)$;

$|\vec{v}_1|\approx5\cdot10^4$ *м/сек* и $|\vec{v}_2|\approx2\cdot10^4$ *м/сек*.

К статье «Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина»

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. 28 дней, 21 день. 2. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pi/4 + k\pi/2$ $(k \in \mathbf{Z})$. 3. $x = 10$.

4. $\operatorname{arctg}(\sqrt{5}/4)$. 5. $\sqrt{(5b^2 - 8a^2)/8}$.

Вариант 2

1. 30 *км/час*. 2. $x = \pm \pi/6 + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. 3. $x = 2$. 4. 3 *дм*². 5. $R(\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$.

Физический факультет

Вариант 3

1. $a^2 \sin\alpha (1 + \sin\varphi)/\cos\varphi$. 2. $x = 1/4$, $y = 5/8$. 3. $x = \pm \pi/3 + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. 4. При $a \in]-\infty; 0] \cup \{1/\sqrt{2}, 1\}$ корней нет; при $a \in]0; 1/\sqrt{2}[\cup]1/\sqrt{2}; 1[\cup]1; \infty[$ $x = a^2$.

Вариант 4

1. $\frac{1}{2} l^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\beta$. 2. $x \in]-\infty; 1/2[\cup]1; \infty[$. 3. $x_1 = k\pi/2$, $x_2 = \pi/8 + k\pi/4$ $(k \in \mathbf{Z})$. 4. $x_1 = 125$, $y_1 = 4$, $x_2 = 625$, $y_2 = 3$.

Физика

1. $$\frac{|\vec{F}_З|}{|\vec{F}_М|} = \frac{M_З}{M_М}\left(\frac{R_М}{R_З}\right)^2 \approx 2{,}55.$$

2. $$m = \frac{\rho\rho_в a S}{\rho_в - \rho} = 3{,}45\ кг.$$

3. $$|\vec{F}_{max}| = m|\vec{g}|(3 - 2\cos\alpha + |\vec{v}|^2/(l|\vec{g}|)) = 8\ н.$$

4. $$|\vec{v}| = \frac{m|\vec{v}_0|}{m + M} = 5\ м/сек; \quad \frac{Q}{K} = 0{,}99.$$

5. $$V_1 = \frac{T_1 V}{T_1 + T_2} \approx 0{,}42\ л; \quad V_2 = V - V_1 \approx 0{,}58\ л.$$

6. $$\varepsilon = \frac{|\vec{F}_1|\, r_1^2}{|\vec{F}_2|\, r_2^2} = 56.$$

7. $$r = \sqrt{R_1 R_2} = 1\ ом.$$

8. $$q = \frac{S|\vec{B}|}{R} = 0{,}05\ к.$$

9. Уменьшенное в 2 раза изображение переместится на 0,1 *м* ближе к линзе.

10. $$\lambda = \frac{hc}{W + A} = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\ м.$$

К статье «Всесоюзный заочный финансово-экономический институт»

Вариант 1

1. 336 и 280. 2. $x = 1$, $y = 2$. 3. $0 < x < 4$. 4. $x = 8$. 5. 3 *см*.

Вариант 2

1. 20 и 15. 2. $x = 3$. 3. $x > 0$, $x < -2$. 4. $x = 16$, $y = 10$. 5. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

К головоломкам «Пять многогранников»

(см. с. 60)

Искомая операция состоит в отсечении плоскостями углов гексаэдра. Если отсечь пирамидки с длиной a бокового ребра, равной $(2 - \sqrt{2})/2$, то получится многогранник, который называют *усеченным гексаэдром* (на рисунке в задаче сверху слева); если $a = 1/2$, то получится *кубооктаэдр* (сверху справа); если $a = 3/4$, то получится *усеченный октаэдр* (внизу справа); если $a = 1$, то получается *октаэдр* (внизу слева).

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 5*)

1.
```
 64 × 14 = 896
  +    +     :
 21 − 13 =   8
 85 + 27 = 112.
```

2. Останется яйцо № 73; нет, не может — шестое яйцо окажется и простым, и золотым.

3. X—IX=I, X=III+VII, XXV—XIII=XII, XXXV=XV+XX.

4. 241 950:3=80 650.

К статье «Семиклассникам о вероятности»

(см. «Квант» № 5)

2: 6/14 = 3/7. Указание. В этом опыте 14 исходов (извлечение любого шара; шары удобно занумеровать), из которых 6 благоприятствуют рассматриваемому событию.

3. 1/8.
4. 8/28.
5. 2/10 = 1/5; «а» (с вероятностью 3/10).
6. 3/18; 5/27; 3/18 < 5/27.

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, В. Машатин, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, Э. Смирнова

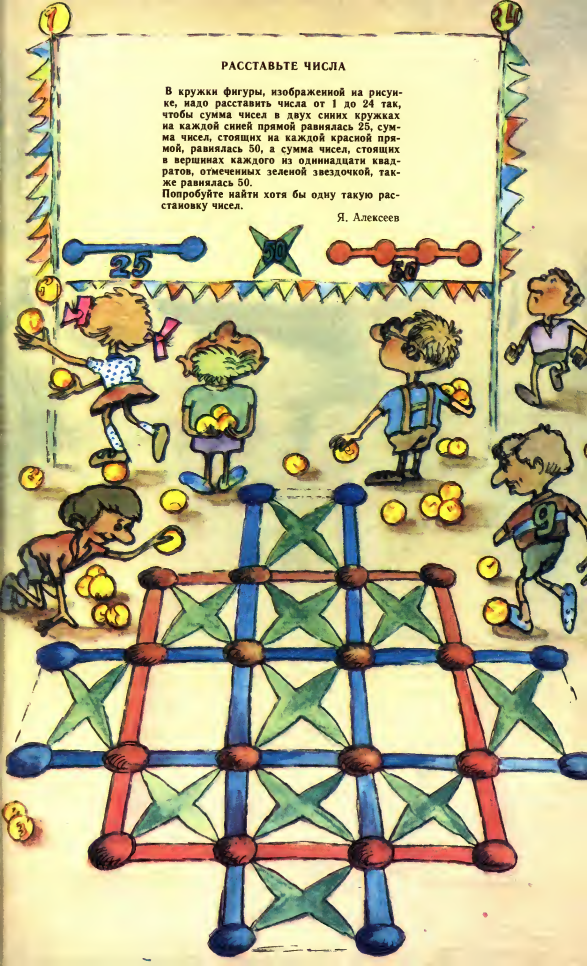
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 28/III 1977 г.
Подписано в печать 10/V 1977 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 6.
Усл. печ. л. 8. 4. Уч.-изд. л. 9,53 Т-08444.
Цена 30 коп. Заказ 576. Тираж 298090 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области



РАССТАВЬТЕ ЧИСЛА

В кружки фигуры, изображенной на рисунке, надо расставить числа от 1 до 24 так, чтобы сумма чисел в двух синих кружках на каждой синей прямой равнялась 25, сумма чисел, стоящих на каждой красной прямой, равнялась 50, а сумма чисел, стоящих в вершинах каждого из одиннадцати квадратов, отмеченных зеленой звездочкой, также равнялась 50.
Попробуйте найти хотя бы одну такую расстановку чисел.

Я. Алексеев

Индекс 70465
Цена 30 коп.

26-88

На этом рисунке вы видите вне окружности шахматную доску 7×7 на оранжевой плоскости, а внутри окружности — ту же доску и плоскость, но уже после инверсии. О том, что такое инверсия, вы можете прочитать на с. 38.

